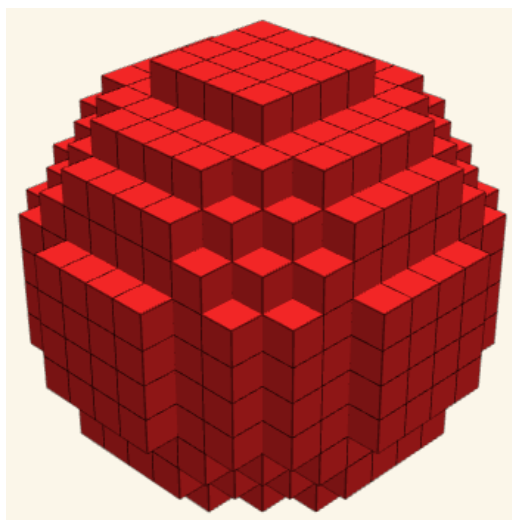


Pixel Round

教学设计

普通高中三年级（高三）数学

本教学设计为四个课时的教学序列，把 *Pixel Round* 这款开源软件引入中国普通高中三年级的数学课堂，围绕一个核心问题展开：如何在有限的像素方格上表示一条连续曲线？设计依据《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》，整合数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算与数据分析等核心素养。



由 Pixel Round 体素化的直径 12 球。

学科融合：数学 · 信息技术 · 美术 · 物理

课程依据：普通高中数学课程标准（2017 版 2020 修订） · 高中信息技术
课程标准

目 录

1 教学概况 4

2 设计理念与依据 4

3 教学目标 6

3.1 知识与技能 6

3.2 过程与方法 6

3.3 情感、态度与价值观 6

4 核心素养指向 7

5 教学重点与难点 8

5.1 教学重点 8

5.2 教学难点 8

5.3 突破策略 8

6 学情分析 8

7 教学资源 9

7.1 信息化资源 9

7.2 传统教具 9

7.3 Pixel Round 部署方式 9

8 分层教学与无障碍设计 10

8.1 学习困难学生 10

8.2 学有余力学生 10

8.3 双课时压缩方案 10

8.4 线上与混合教学 10

9 教学过程 11

9.1 第一课时 — “电脑用方块画圆，可能吗？” 11

9.2 第二课时 — “三种算法，三个图形” 12

9.3 第三课时 — “从椭圆到椭球：跨入三维” 15

9.4 第四课时 — “项目实战：原创像素 / 体素作品与数学辩护” 18

10 教学评价 19

10.1 诊断性评价 19

10.2 形成性评价 19

10.3 表现性评价 19

10.4 评价量规	20
10.5 学期评价建议占比	20
11 学科融合与拓展	20
11.1 与信息技术学科	20
11.2 与美术学科	20
11.3 与物理学科	21
11.4 与历史 & 数学文化	21
12 参考文献	21
A Pixel Round 演示脚本	23
A.1 开启与 2D 模式	23
A.2 椭圆	23
A.3 3D 模式	23
A.4 导出	23
B 练习单	25
C 无信息化条件下的替代方案	27
C.1 各课时替代措施	27
C.2 准备物品（一次性）	27
C.3 城乡差异下的实施建议	27
D 教师术语速查	28

1. 教学概况

学科	数学（必修与选择性必修内容）；可与信息技术学科联合实施。
年级	普通高中三年级（高三）。可调整用于高二、信息技术选修班。
学校类型	普通高中（公办为主）。乡村中学与城市重点中学的差异适配方案见附录 C。
课时安排	4 课时，每课时 40–45 分钟（共 160–180 分钟）。亦可压缩为两个 90 分钟的双课时，方案见 §8。
核心资源	Pixel Round — 免费浏览器应用，无需注册、无需账号、无需服务器、支持离线运行（PWA）。
课标对应	选择性必修第一册“空间向量与立体几何”、必修第一册“函数”；数学建模与算法初步。
学科融合	信息技术（算法与编程，Python 实现）；美术（数字图像创作）；物理（声波、加法合成）。
学生先备知识	平面直角坐标系；圆的方程；柱体、锥体、球体的体积公式；函数与不等式；百分比与误差。
教师备课要求	用 15 分钟自行探索 Pixel Round；阅读 docs_math/Pixel_Round_Math_zh-CN.pdf。

关于实施环境的说明

本设计充分考虑中国普通高中的实际情况：城乡学校在硬件配置上差距显著，部分学校有完善的多媒体教室、平板教学车与“班班通”工程，另有部分学校仅有传统黑板和粉笔。Pixel Round 可在任何近十年生产的笔记本电脑或学生自带手机的浏览器中运行，不需联网（首次访问后可永久离线使用），不收集任何个人信息，符合《中华人民共和国个人信息保护法》对未成年人数据保护的相关规定。对于完全无信息化设备的课堂，本设计在附录 C 提供全纸质替代方案，确保教学不受硬件限制。

2. 设计理念与依据

像素艺术与体素艺术深刻嵌入当代高中生的视觉文化经验中。从《我的世界》（Minecraft）到米哈游的《原神》《星穹铁道》，从腾讯系大型手游到 B 站独立游戏创作社区，像素与体素的视觉语言无处不在。把这种日常视觉经验作

为 **数学研究对象**，意味着把熟悉的图像转化为真正的数学问题：计算机只能开启与关闭方格，它如何决定开启哪些方格才能呈现一条圆滑的曲线？

本设计的理论支点有三：

- **基于六大核心素养的整体教学**。根据《普通高中数学课程标准（2017 版 2020 修订）》，本设计明确指向 数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析六大核心素养，按课时合理分布。
- **大单元教学** 与 **深度学习**。把“在离散网格上表示连续曲线”这一问题作为大单元的核心驱动问题，避免将算法、方程、立体几何等分散讲授，强调知识之间的内在结构与方法之间的相互联系。
- **“双减”政策下的提质增效**。本设计强调课堂内的探究与建构，作业精简，鼓励学生在课堂内完成主要的认知任务，符合教育部 2021 年颁布的“双减”精神，减轻课外补课负担。

文化与历史维度

中国古代数学家对圆的研究有着深厚的传统。刘徽在《九章算术》注（公元 263 年）中提出 **割圆术**，用内接正多边形逐步逼近圆面积；祖冲之在公元 5 世纪将 π 计算到 7 位精度，这一记录在世界范围内保持了近千年。割圆术与本节课所讨论的“离散逼近连续”在思想上具有内在一致性：都是以可计算的离散对象逼近不可直接计算的连续对象。教师可在第一课时的引入环节自然提及这一渊源，唤起学生的文化认同。

3. 教学目标

3.1 知识与技能

- 掌握椭圆的隐式方程 $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 = 1$ ，理解圆是其特殊情形 ($r_x = r_y$)；
- 理解三种像素归属判定算法（欧几里得、Bresenham 中点法、阈值法）的数学定义与差异；
- 把二维椭圆方程推广到三维空间，得到椭球面方程；
- 把三维体的平面截面理解为关于体素坐标的 线性不等式。

3.2 过程与方法

- 能自主使用 Pixel Round 软件，在二维与三维模式下完成图形生成与 PNG 导出；
- 能在坐标纸上按照规定的判定规则手工绘制离散圆，并与软件输出进行对比；
- 能通过统计像素数目计算离散面积，并与连续面积 $\pi r_x r_y$ 比较，求相对误差；
- 能综合圆、椭圆、球、椭球设计一幅原创像素 / 体素作品，并用数学语言阐释设计选择。

3.3 情感、态度与价值观

- 体会同一连续对象在离散空间中存在多种合理的表示方式，培养包容多元的数学观；
- 在小组合作中提升沟通、协作、批判性反思能力；

- 通过对中国古代数学（刘徽、祖冲之）的回顾，增强文化认同与民族自信。

4. 核心素养指向

依据《普通高中数学课程标准（2017 版 2020 修订）》，本设计明确指向六大核心素养，按课时不同有所侧重：

数学抽象

学生从“计算机如何画圆”这一具体问题中抽象出连续与离散的对偶关系，并以椭圆隐式方程的形式精确表达。侧重课时：1, 3。

逻辑推理

学生分析三种算法的判定逻辑差异，并通过例题验证 Bresenham 决策参数的整数性质。侧重课时：2。

数学建模

学生把“设计一幅像素艺术作品”这一开放任务转化为关于半轴、算法、截面的具体数学描述，并通过软件验证模型。侧重课时：4。

直观想象

学生借助 Pixel Round 的三维可视化，建立椭球、平面截面、八分对称的空间直观；通过实物坐标纸与软件输出对照，形成连续—离散的视觉直观。贯穿所有课时。

数学运算

学生在第二、第三课时反复进行椭圆方程求解、平方和判定、面积体积估算、相对误差计算。侧重课时：2, 3。

数据分析

学生比较三种算法的离散面积，用相对误差量化它们与理想值的偏离，得出有依据的结论。侧重课时：2 的最后一个活动。

5. 教学重点与难点

5.1 教学重点

- 椭圆与椭球的隐式方程，作为像素归属判定的数学基础；
- 三种算法（欧几里得、Bresenham、阈值）的判定条件及其几何含义；
- 平面截面作为线性不等式的代数表达。

5.2 教学难点

- Bresenham 算法决策参数的推导（属于难点，可按学情选讲）；
- 离散面积 / 体积与连续面积 / 体积之间收敛性的认识；
- 在小组合作中用数学语言进行美学辩护。

5.3 突破策略

- 在第一课时引入手绘活动，让学生在动手中体验“没有唯一正确答案”的认知冲突；
- 在第二课时使用大量直观图示与逐步演示，由具体到一般地构建 Bresenham 算法的形象；
- 在第四课时通过开放性项目和教师巡回辅导，引导学生将美学直觉转化为数学表达。

6. 学情分析

高三学生具备以下优势与挑战：

优势：已完成必修一至必修五、选择性必修一的主要内容学习；熟悉坐标系、圆与椭圆的方程；具备初步的算法意识（信息技术课已涉及 Python 基本语法）；视觉文化经验丰富，对像素艺术与游戏有强烈兴趣。

挑战：高考压力大，对“非高考型”活动易产生抵触；个体差异显著，部分学生数学运算能力薄弱；部分学校对“双减”后课内主战场的要求尚在适应中；多媒体设备分布不均。

应对策略：本设计将高考重要考点（椭圆方程、立体几何体积公式、向量法、不等式）作为内容支柱，并通过 相对误差等概念贯穿数据分析素养，与高考能力要求紧密对接，避免“为玩而玩”的印象。

7. 教学资源

7.1 信息化资源

- Pixel Round（每生或每两人一台设备）；
- 多媒体投影或交互式电子白板；
- 计算机房 或 平板教学车 或 学生自带智能手机（BYOD）。

7.2 传统教具

- 坐标纸（5 mm 方格）每生 2 张；
- 铅笔、橡皮、30 cm 直尺；
- 彩色铅笔或马克笔（推荐使用项目主色 #CC2020 红与黑）；
- 印制的练习单（附录 B）；
- 黑板或白板。

7.3 Pixel Round 部署方式

按便利程度排序：

1. **教师托管** 于 GitHub Pages、校园网或个人云空间。通过二维码分发链接。

2. **本地副本** 复制项目文件至各机房电脑，用 `file://` 直接打开 `index.html`。
3. **学生手机离线运行**：通过 PWA 模式预先缓存于浏览器，课堂上无需联网。

8. 分层教学与无障碍设计

每一活动均提供 **至少两种切入路径** 与 **两种结果展示方式**，体现“面向全体、关注差异”的教学理念。

8.1 学习困难学生

- 活动 1.2 给予额外时间（15 分钟替代 10 分钟）；
- 提供预先标注圆心的坐标纸；
- 最终项目（活动 4.3）的辩护可选口头、书面或录音三种方式。

8.2 学有余力学生

- 拓展任务：通过对中点 $(1, R - \frac{1}{2})$ 代入 $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ 推导 Bresenham 决策参数 $d_0 = 1 - R$ ；
- 探究任务：估计离散面积与 πr^2 之间的收敛速度，得到 $O(r^{2/3})$ （高斯圆格点问题，Huxley 2003）；
- 编程任务：用 20 行 Python 实现欧几里得算法，作为信息技术课的延伸作业。

8.3 双课时压缩方案

若学校采用 90 分钟连堂制（如部分实验校或选修课），课时 1+2 合并为第一连堂，课时 3+4 合并为第二连堂，中间留 10 分钟休息。

8.4 线上与混合教学

Pixel Round 的 Web 性质完美适配腾讯会议、钉钉课堂、希沃白板等远程教学场景。教师共享屏幕，学生在自有设备同步操作。坐标纸作业可拍照上传至班级群或学校的在线学习平台（如智慧课堂、希沃班级优化大师）。

9. 教学过程

教学过程采用 **五环节教学法**：情境导入 → 自主探究 → 合作展示 → 精讲点拨 → 巩固提升，与“以学生为中心”的课程改革精神一致。每一课时根据内容特点对环节加以伸缩。

9.1 第一课时 — “电脑用方块画圆，可能吗？”

课时目标

明确离散光栅化作为一个真实数学问题；激活已学圆方程；初次接触 Pixel Round。

1.1 — 情境导入 8 分钟

方式：独立思考 → 同桌交流 → 集体分享。

步骤：

1. 投影展示三幅经典像素图：超级马里奥的蘑菇、初代宝可梦、谷歌“怀旧”涂鸦。
2. 提问：“仔细观察。这三幅图有什么共同点？它们与圆规画出的圆有什么区别？”
3. 学生独立写下答案（1 分钟），与同桌交流（2 分钟）。
4. 集体反馈，教师在黑板上记录关键观察，引导得出：“电脑只能开启或关闭方格 — 它如何选择哪些方格？”

1.2 — 自主探究 12 分钟

方式：手工绘制与形式定义对照。

材料：坐标纸、铅笔。

步骤：

1. 每生取半张坐标纸，划出 11×11 方格区域并标记中心。
2. 任务：“涂出直径为 10 的最佳圆。4 分钟，不允许用橡皮。”
3. 时间到后，3–4 名学生在黑板预先画好的方格区上重现自己的画法。
4. 教师引导观察：“大家画的一样吗？为什么不一样？谁是对的？”
5. 总结：没有唯一答案。每位同学隐式地采用了不同的 **判定准则**。

1.3 — 精讲点拨 15 分钟

方式：教师讲解 + 学生笔记。

以原点为圆心、半径为 r 的圆的隐式方程：

$$x^2 + y^2 = r^2$$

圆内部点满足 $x^2 + y^2 < r^2$ 。推广到半轴为 r_x, r_y 的椭圆：

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

在像素网格上，问题是：哪些 **方格** 属于内部？Pixel Round 提供三种回答：

- **欧几里得**：方格中心 $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 是否在内部？
- **Bresenham**：1965 年提出的经典算法，仅使用整数运算。
- **阈值**：方格的某个角点是否在内部？

现场演示：教师打开 Pixel Round，设置直径为 10，依次切换三种算法，每种停留 30 秒。强调：三种方法都数学上正确，只是依据的判定准则不同。

1.4 — 巩固提升 10 分钟

任务：“回到坐标纸。按 **严格的** 欧几里得准则重画直径为 10 的圆：仅当方格中心 $(i + 0.5, j + 0.5)$ 距圆心不超过 5 时才填涂。”

完成后，与 Pixel Round 欧几里得模式下直径 10 的输出对照。两者应完全一致。

出门小问题 (2 分钟)：“用一句话说明：方格‘在圆内部’具体是什么意思？”

课后练习 (选做)

对直径为 8 和 14 重复活动 1.4。下节课带来两张图。

9.2 第二课时 — “三种算法，三个图形”

课时目标

深入分析三种算法各自的数学定义；定量比较三者结果。

2.1 — 旧识激活 5 分钟

快速回收课后练习，观察学生作品差异，宣布本节课目标：“今天我们用显微镜看每一种算法，揭示 *Bresenham* 为何被誉为计算机科学的瑰宝。”

2.2 — 欧几里得算法 10 分钟

对方格 (i, j) ，计算归一化偏移：

$$d_x = \frac{i + \frac{1}{2} - c_x}{r_x}, \quad d_y = \frac{j + \frac{1}{2} - c_y}{r_y}$$

方格被填涂当且仅当 $d_x^2 + d_y^2 \leq 1$ 。

黑板演算：取 $c_x = c_y = 5, r_x = r_y = 5$ ，方格 $(2, 1)$ 。得 $d_x = -0.5, d_y = -0.7$ ， $d_x^2 + d_y^2 = 0.74 \leq 1$ 。方格在内部。

学生独立完成：方格 $(0, 0)$ 是否在内部？（答案： $1.62 > 1$ ，不在。）

2.3 — Bresenham 算法 15 分钟

历史背景：Jack Bresenham 1965 年于 IBM 发表此算法。当时一次浮点乘法可达数百微秒。他的贡献是：仅用整数加法与比较即可绘制圆。

中国语境：1965 年也是中国 109 丙机研制完成的年代（中科院计算所），中国的计算机科学正在起步。算法的整数化思想，对于资源有限的早期计算机时代具有普适意义。

从 $(x = 0, y = R)$ 、 $d_0 = 1 - R$ 出发，在 $0-45^\circ$ 八分之一弧上每一步：

$$\begin{cases} \text{若 } d < 0: & \text{下一像素}(x+1, y), d += 2x + 3 \\ \text{若 } d \geq 0: & \text{下一像素}(x+1, y-1), d += 2(x - y) + 5 \end{cases}$$

逐步演示：在黑板上对 $R = 5$ 逐步追踪 x, y, d 。其余七个八分弧由 D_4 对称性导出。

分层提示：若学生在决策参数代数上遇到困难，可仅以规则形式介绍而不深究推导；完整推导见 Pixel_Round_Math_zh-CN.pdf §5。

2.4 — 阈值算法 8 分钟

对每个方格 (i, j) , 求距形心最近的方格角点:

$$n_x = \text{clamp}(c_x, i, i+1), \quad n_y = \text{clamp}(c_y, j, j+1)$$

方格被填涂当 $\left(\frac{n_x - c_x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y - c_y}{r_y}\right)^2 \leq 0.94$ 。

为何是 0.94 而非 1? 经验上当阈值为 1 时, 四个基本方向 (东、南、西、北) 会出现单像素 “刺”。略小的阈值可去除这一伪影。这是一种基于视觉观察的工程决策 — 提醒学生: 纯数学并非总能给出最终答案。

2.5 — 量化比较 7 分钟

两人一组合作：在 Pixel Round 中：

1. 设置直径 16，模式 填充；
2. 启用信息标签，记录三种算法各自的离散面积；
3. 计算连续面积 $\pi r^2 = 64\pi \approx 201.06$ ；
4. 对每种算法计算相对误差 $\frac{|S_{\text{离散}} - S_{\text{连续}}|}{S_{\text{连续}}} \times 100\%$ ；
5. 把三种算法按误差由小到大排序。

预期结果：欧几里得通常误差小于 1%；阈值高估若干个百分点；Bresenham 介于两者之间。集体反馈。

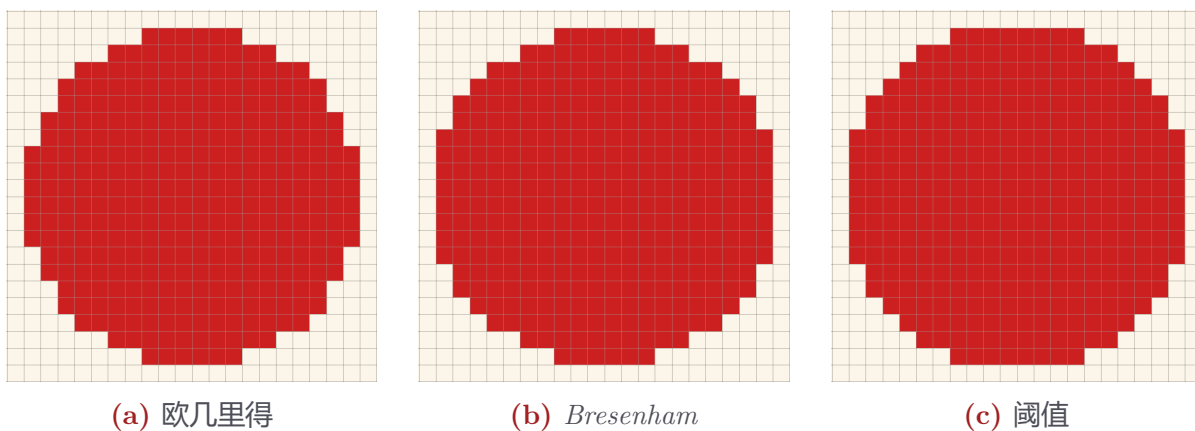


Figure 1: 同一直径 20 的圆在三种算法中的表现。直径较大时差异更细微，直径较小时差异更明显。

9.3 第三课时 — “从椭圆到椭球：跨入三维”

课时目标

把椭圆方程推广至三维；引入体素与离散体积；理解平面截面作为线性不等式。

3.1 — 二维到三维 15 分钟

增加第三维 z 。椭圆方程自然推广为：

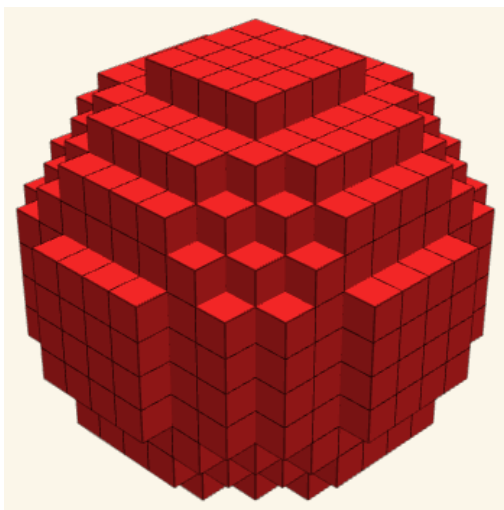
$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

当 $r_x = r_y = r_z = r$ ，回到 **球面** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 。

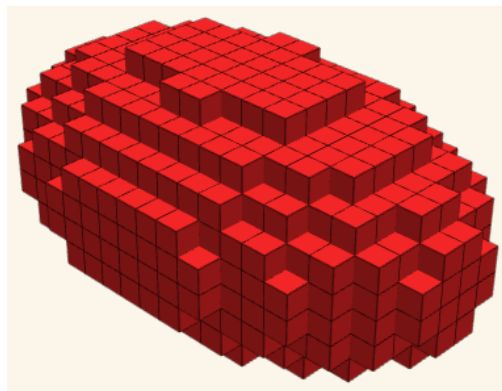
术语：三维网格的方格称为 **体素** (voxel, volume element)。判定准则与二维相同，加入 z 维度：

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \leq 1, \quad a_\xi = \frac{\xi + \frac{1}{2} - c_\xi}{r_\xi}$$

演示：将 Pixel Round 切换为 3D 模式，在球与椭球之间切换，鼠标拖动旋转，对比三种渲染样式 (Classic, Smooth, Blocks)。



(a) 球 $D = 12$ ($r_x = r_y = r_z = 6$)。



(b) 椭球 $W = 20, H = 10, D = 12$ 。

Figure 2: 三维体素化。每个立方体是一个体素，其中心坐标根据隐式方程测试。

3.2 — 连续体积与离散体积 15 分钟

椭球的连续体积是积分学经典结果：

$$V = \frac{4}{3} \pi r_x r_y r_z$$

当 $r_x = r_y = r_z = r$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 。这一公式在高考立体几何题中频繁出现。

两人合作：

1. 计算直径 12 ($r = 6$) 球的连续体积： $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 216 \approx 904.78$;
2. 在 Pixel Round 中生成 $D = 12$ 球 (填充模式), 读取离散体积;
3. 计算相对误差。

讨论： $V_{\text{离散}}/V_{\text{连续}} \rightarrow 1$ (当 $D \rightarrow \infty$)。直径较小时偏差明显 — 这是数学上的正确事实：离散化本身改变了计数。可与刘徽“割圆术”的逼近思想相互印证。

3.3 — 截面与线性不等式 8 分钟

Pixel Round 可用三个平面切割立体。每一切割是一个 **线性不等式**：

X 轴: $x \geq cut \Rightarrow$ 体素被舍弃

Y 轴: $y \geq cut \Rightarrow$ 体素被舍弃

对角线: $x + y \geq cut \Rightarrow$ 体素被舍弃

演示： 沿 Y 轴切球至 50%，再沿 X 轴切至 50%，最后切换至对角线 50%。

引导提问： “对角切割的滑块为什么范围是 0 到 $D_x + D_y$ ，而不是 D_x ？方程的哪部分告诉我们这一点？”

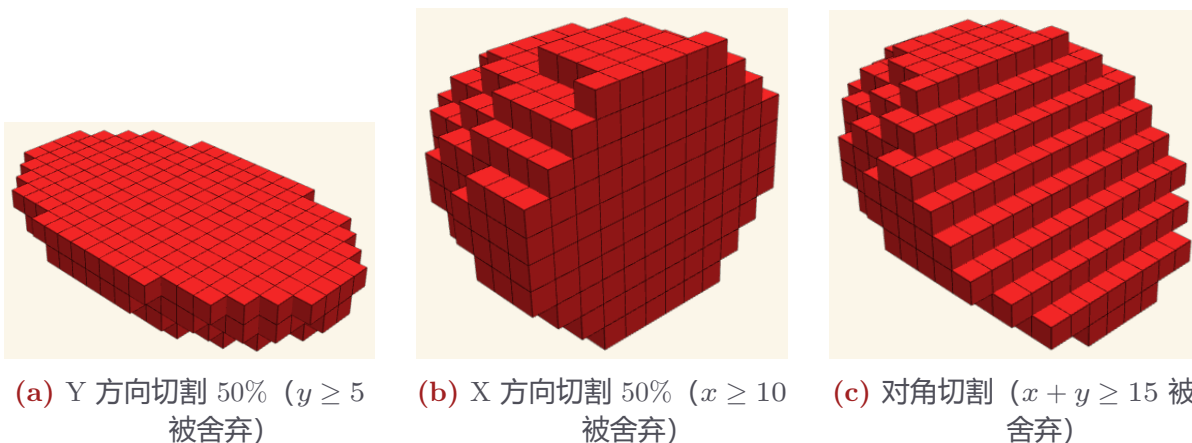


Figure 3: 同一椭球 ($W = 20, H = 10, D = 12$) 上的三种平面切割，每种保留 50% 的体积。请注意对角切割的阶梯形图案。

3.4 — 中国数学史回响 7 分钟

回到刘徽与祖冲之的圆周率工作。

教师在黑板上呈现 割圆术的图示：内接正多边形从 6 边、12 边、24 边、... 不断加倍，逼近圆面积。

讨论：“刘徽 1700 多年前在做与我们今天相同的事 — 用可计算的离散对象逼近不可直接计算的连续对象。当代计算机用的方格（像素）与刘徽用的多边形，思想上是同一回事。Pixel Round 中三种算法的差异，恰对应于选择多边形的不同方式。”

文化拓展：这是一个理想的 研究性学习起点，可由学有余力的学生在课后撰写小论文，参加学校的“数学文化节”或市级数学建模竞赛。

9.4 第四课时 — “项目实战：原创像素 / 体素作品与数学辩护”**课时目标**

综合运用本单元全部知识进行原创设计；通过数学语言的辩护进行表现性评价。

4.1 — 项目布置 5 分钟

任务：“两人或三人为一组，制作一幅像素艺术或体素艺术作品，至少综合使用 Pixel Round 生成的三种形体（圆、椭圆、球、椭球）。可以是人物、图标、动物、徽标 — 自选。完成后每组上台展示，并用 **数学语言** 辩护设计选择：为什么选这种算法？为什么这样的比例？为什么这样的截面？”

分组：教师课前按异质性原则预分。1 分钟入座。

4.2 — 项目实施 25 分钟**每组材料：**

- 一台运行 Pixel Round 的设备；
- 坐标纸、铅笔、马克笔以备草稿；
- 任务卡（附录 B 练习 5）写有三道必答题。

内部阶段：

1. 头脑风暴，草图。
2. 在 Pixel Round 内完成主要构件，分块导出 PNG。
3. 整合（在坐标纸上用马克笔重画，或在 PPT/演示软件中拼合）。
4. 在任务卡上书写数学辩护。

教师巡回：走访各组，提出引导性问题 — “为什么选这种算法？这条截面用不等式怎么写？”

4.3 — 展示与综合 15 分钟

每组 2 分钟，展示作品并回答三道必答题中的 至少一道。

最低要求：

- 至少指出一种数学图形；
- 命名所选算法并陈述（哪怕是事后的）选择理由；
- 若有 3D 截面，须用不等式描述。

教师总结 (3 分钟)：回到本单元的核心命题 — “在离散网格上，同一条连续曲线允许多种表示；选择一种是一项数学决策。” 宣布形成性评价的提交方式。

10. 教学评价

评价体系结合 **诊断性评价**、**形成性评价** 与 **表现性评价**，与新课程改革倡导的“以评促学”相一致。

10.1 诊断性评价

在第一课时活动 1.2 中开展。教师走动观察，识别坐标系、圆方程、面积计数等先备知识的薄弱学生。

10.2 形成性评价

分散于四节课：观察小组讨论、个体回答、活动 1.4 的对照、活动 2.5 的计算、活动 3.2 的体积比较。

10.3 表现性评价

两项产出：

1. **练习单**（附录 B），5 道题，第四课时结束后提交。
2. **项目作品**（活动 4.2）附带数学辩护卡。

10.4 评价量规

评价维度	优秀 (A, 85–100)	合格 (B–C, 60–84) / 不合格 (D, 0–59)
数学知识	能熟练运用椭圆 / 椭球方程; 准确区分三种算法及其效果。	能用圆方程但难以推广到椭圆; 混淆算法。
软件运用	自主操作 Pixel Round 2D / 3D; 可导出; 切换算法熟练。	频繁求助; 只能操作 2D。
语言表达	用数学术语 (算法、体素、截面、不等式) 展开辩护。	仅作美学描述; 缺少数学语言。
合作精神	在小组中积极贡献; 参与全班讨论。	独立工作; 少有贡献。

10.5 学期评价建议占比

- 练习单: 40%;
- 项目作品与展示: 50%;
- 过程观察: 10%。

11. 学科融合与拓展

11.1 与信息技术学科

Bresenham 算法是任何算法课程的经典案例。第二课时 2.3 可与信息技术教师协同实施, 进一步用 Python 实现算法 (约 25 行代码), 并讨论时间复杂度 ($O(R)$)。

11.2 与美术学科

像素艺术是数字时代的重要艺术语言。Pixel Round 提供了罕见的 **数学与艺术同一对象的入口**: 一幅画作 同时是方程与构图。建议: 与美术教师联合开展 “数学之美 / 艺术之精” 主题展览, 作品张贴于校园文化墙或上传至校园公众号。

11.3 与物理学科

Pixel Round 的音效层采用纯正弦波的加法合成。所选频率近似 **十二平均律** (每个半音的频率比为 $2^{1/12} \approx 1.0595$)。与物理课程“机械波”“声学”单元自然衔接。

11.4 与历史 & 数学文化

课时 3.4 已涉及刘徽与祖冲之。教师可进一步引导有兴趣的学生写小论文, 题材如: “从割圆术到像素: 离散逼近的两千年”、“东方与西方的圆: 相同的数学, 不同的文化”。这是高三研究性学习与综合素质评价的优秀素材。

12. 参考文献

- Bresenham, J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 卷 4, 期 1, 页 25–30, 1965.
- 教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订). 北京: 人民教育出版社, 2020.
- 教育部. 关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见 (“双减” 意见). 2021.
- 教育部. 普通高中信息技术课程标准 (2017 年版 2020 年修订). 北京: 人民教育出版社, 2020.
- 刘徽 (注). 九章算术注 (约公元 263 年). 收入: 钱宝琮校点《算经十书》, 中华书局, 1963.
- 史宁中. 数学基本思想 18 讲. 北京师范大学出版社, 2016.
- 史宁中. 学生发展核心素养与数学素养. 数学教育学报, 2017(4): 1–4.
- 章建跃. 数学教育研究. 北京师范大学出版社, 2017.
- 张奠宙. 中国数学教育的进展与挑战. 高等教育出版社, 2018.
- 顾沛主编. 数学文化与数学方法论. 高等教育出版社, 2008.
- Lakatos, I. (拉卡托斯). 证明与反驳: 数学发现的逻辑. 上海译文出版社, 1987.
- Pólya, G. (波利亚). 怎样解题: 数学思维的新方法. 上海科技教育出版社, 2007.

- Pixel Round 配套技术文档: docs_math/Pixel_Round_Math_zh-CN.pdf.

A. Pixel Round 演示脚本

为活动 1.3 提供的演示流程，亦可供教师自学使用。总时长 15 分钟。

A.1 开启与 2D 模式

1. 打开 Pixel Round。指出顶栏、画布区、控制区。
2. 确认 **2D / 圆** 模式。
3. 将 Size 滑块设为 10，观察图形。
4. 启用画布角的信息标签。朗读：“直径 10，半径 5，面积...，算法欧几里得”。
5. 依次切换三个算法标签：**欧几里得** / **Bresenham** / **阈值**，每个停留 30 秒。

A.2 椭圆

1. 切换形状为 **椭圆**。出现 宽度与 高度两个滑块。
2. 设置 $W = 16$, $H = 8$ 。
3. 讨论：“此图形方程为 $(x/8)^2 + (y/4)^2 = 1$ 。为什么 x 除以 8，而 y 除以 4？”

A.3 3D 模式

1. 切换至 **3D / 球**, $D = 12$ 。
2. 鼠标拖动旋转。
3. 启用信息标签：记录体积。
4. 切换至 **椭球**, $W = 20, H = 10, D = 10$ 。
5. 演示 Y 轴切割滑块至 50%。
6. 切换至对角线轴。讨论斜切面。

A.4 导出

1. 使用画布角的下载按钮。

2. 保存 PNG。
3. 注意：导出图像高分辨率，可用于打印、投影或嵌入作业。

B. 练习单

要求：独立完成。可借助 Pixel Round 验证，但数学说明为必答。手写或打印皆可。

练习 1 — 圆的方程

题目：圆心在原点 $(0, 0)$ ，半径 $r = 7$ 。对下列各点，判定其在圆内、外、上。说明理由。

a) $(3, 4)$

答案：在内 ($25 < 49$)。

b) $(5, 5)$

答案：在外 ($50 > 49$, $\sqrt{50} \approx 7.07$)。

c) $(0, 7)$

答案：在上。

d) $(-7, 0)$

答案：在上。

练习 2 — 欧几里得判定

题目：圆心 $(5, 5)$ ，半径 5。对方格 $(i, j) = (1, 3)$ 应用欧几里得准则：是否填涂？

答案：方格中心 $(1.5, 3.5)$ ，到圆心距离 $\sqrt{14.5} \approx 3.81 < 5$ ，**填涂**。

练习 3 — 离散与连续面积

题目：在 Pixel Round 中生成欧几里得直径 20 的圆。记录离散面积。计算 πr^2 。计算相对误差。对阈值算法重复。比较。

答案： $S_{\text{连续}} = 100\pi \approx 314.16$ 。欧几里得误差通常 $< 2\%$ 。阈值高估 $5\%-8\%$ 。

练习 4 — 椭球体积与切割

题目：椭球半轴 $r_x = 4$ 、 $r_y = 6$ 、 $r_z = 3$ 。

a) 求连续体积。

b) 在 Y 轴方向切去 50% 高度后，剩余体积？

c) 把该切割表示为关于 y 坐标的不等式。

答案：(a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 = 96\pi \approx 301.59$ ；(b) 对称性， ≈ 150.80 ；(c) $y < cut$, $cut = 0.5 \cdot D_y = 6$ 。

练习 5 — 项目辩护卡

题目：完成小组原创作品后，作答：

- (1) 列出使用的几何形体（圆、椭圆、球、椭球）及其参数。
- (2) 主要形体使用了哪种算法？为什么？该算法产生了哪种另外两种无法产生的视觉效果？
- (3) 是否使用了 3D 截面？若有，用不等式描述 其中一项。

C. 无信息化条件下的替代方案

针对硬件条件有限的学校（如部分中西部、农村或边远学校），本方案允许整个教学序列 完全用纸面材料完成。教学内容核心保持不变，仅载体改变。

C.1 各课时替代措施

课时	原活动	纸面替代
1	Pixel Round 演示 (1.3)	教师在课前于大幅坐标纸上手工绘制三种算法对应的 $D = 10$ 圆，贴于黑板上对照。
2	软件量化比较 (2.5)	发放三幅 $D = 16$ 预绘图 (教师课前在 Pixel Round 中生成并打印)，让学生手工计数比较。
3	3D 球的生成 (3.1, 3.2)	发放球的 逐层切片图 (每个 z 一张坐标纸图)，学生通过堆叠想象三维。
4	Pixel Round 中创作 (4.2)	完全用坐标纸与彩铅 / 马克笔创作。数学辩护 (4.3) 不变。

C.2 准备物品（一次性）

- A3 大坐标纸 1 张 (30×30 方格，教师手绘)，贴于黑板或墙面。
- 每生 4 张 A4 坐标纸 (5 mm 方格)。
- 三幅预绘图对照图，教师课前在 Pixel Round 中生成，导出为 PNG 后送学校文印中心打印。

C.3 城乡差异下的实施建议

中国教育资源在地区间存在显著差异。本设计为不同情境提供差异化建议：

- **重点城市重点中学**（北京、上海、杭州、深圳等）：可加深第二课时 Bresenham 推导，并扩展至高斯圆格点问题的研究性学习。
- **普通城市中学**：按设计主线实施，强化与高考立体几何专题的衔接。
- **县城与农村中学**：采用本附录的纸面替代方案，结合一台教师演示电脑（投影）即可完整完成；强化对刘徽“割圆术”文化的呼应。

D. 教师术语速查

- **算法 (algorithm)** — 解决问题的有限、明确的指令序列。Pixel Round 的三种算法是同一问题（哪些方格被填涂）的三种不同流程。
- **Bresenham 算法** — 1965 年 Jack Bresenham 在 IBM 发表，用于直线绘制；后被 Pitteway、Kappel 推广至椭圆。其特征是仅用整数运算。
- **Canvas (画布)** — 提供浏览器 2D 或 3D 绘图区域的 HTML 元素。
- **隐式方程** — 形如 $F(x, y) = 0$ 的方程，曲线被定义为某函数的零点集合。椭圆为 $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 - 1 = 0$ 。
- **像素 (pixel)** — picture element 的缩写。数字图像的最小单元，对应网格中 1×1 的方格。
- **PWA (Progressive Web App)** — 可安装于设备并离线运行的网页应用。Pixel Round 即是。
- **光栅化** — 把连续几何描述转化为像素（2D）或体素（3D）矩阵的过程。
- **半轴** — 椭圆中心到沿对应坐标轴方向上的顶点的距离。圆是 $r_x = r_y$ 的特殊情形。
- **十二平均律** — 把八度平均分为 12 个半音。相邻半音的频率比为 $\sqrt[12]{2} \approx 1.0595$ 。是现代西方与中国当代音乐的基础。
- **体素 (voxel)** — volume element 的缩写。三维网格中的 $1 \times 1 \times 1$ 立方单元。
- **WebGL** — 浏览器内的 3D 图形 API。Pixel Round 通过 *three.js* 调用。

— 教学设计完 —