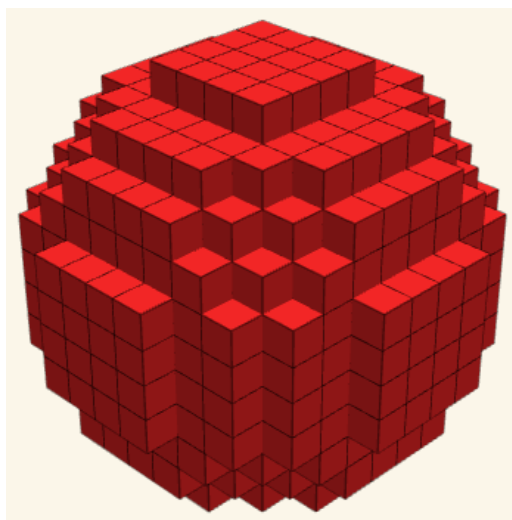


Pixel Round

Plano de Aula

3.º ano do Ensino Médio

Sequência didática de quatro aulas para apresentar o gerador *Pixel Round* a turmas do Ensino Médio da rede pública brasileira. Articula *geometria analítica*, *pensamento computacional* e *expressão artística* em torno de um único problema: como representar uma curva contínua sobre uma malha finita de pixels. Material concebido em diálogo com a realidade plural do país — da escola técnica federal à escola do campo, da capital metropolitana ao sertão.



Esfera de diâmetro 12 voxelizada pelo Pixel Round.

Áreas integradas: Matemática · Linguagens (Arte digital, design) ·
Ciências da Natureza (ondas e luz) · Computação

Alinhamento: BNCC — Ensino Médio · Novo Ensino Médio (Lei
14.945/2024) · ENEM · **OBMEP**

Sumário

1	Identificação e contextualização	6
2	Justificativa pedagógica	7
3	Objetivos	9
3.1	Objetivo geral	9
3.2	Objetivos específicos	9
4	Competências e habilidades da BNCC	10
4.1	Articulação com o ENEM	11
4.2	Tema Contemporâneo Transversal	12
5	Conteúdos	12
5.1	Conceituais	12
5.2	Procedimentais	13
5.3	Atitudinais	13
5.4	Modos de renderização e variedade de algoritmos	13
6	Conhecimentos prévios	14
7	Recursos e materiais	14
7.1	Recursos digitais	14
7.2	Recursos analógicos	14
7.3	Livro didático e PNLD	15
7.4	Acesso ao Pixel Round	15
8	Adaptações para a realidade plural brasileira	15
8.1	Escolas estaduais urbanas (capital ou região metropolitana)	15
8.2	Escolas estaduais urbanas (interior)	16
8.3	Institutos Federais (IFs) e CEFETs	16
8.4	Escolas do campo	16
8.5	Escolas indígenas e quilombolas	16
8.6	Educação de Jovens e Adultos (EJA)	16
8.7	Variante para 2 aulas geminadas (100 min cada)	17
8.8	Crosswalk com Currículos Referenciais Estaduais	17
8.9	Ensino híbrido ou remoto	17
9	Sequência didática	17
9.1	Aula 1 — “Como o computador desenha um círculo com quadradinhos?”	18
9.2	Aula 2 — “Três algoritmos, três desenhos”	20

9.3	Aula 3 — “Da elipse ao elipsóide: a terceira dimensão”	23
9.4	Aula 4 — “Projeto final: pixel art autoral com fundamentação matemática”	27
10	Avaliação	29
10.1	Avaliação diagnóstica	29
10.2	Avaliação formativa	29
10.3	Avaliação somativa	29
10.4	Rubrica de avaliação	30
10.5	Conversão para notas	30
11	Articulações com o ecossistema matemático brasileiro	30
11.1	OBMEP — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	31
11.2	PIC — Programa de Iniciação Científica da OBMEP	31
11.3	Artur Avila e o IMPA	31
11.4	OBI — Olimpíada Brasileira de Informática	31
11.5	Etnomatemática (D’Ambrosio)	32
11.6	PROFMAT	32
12	Articulações interdisciplinares	32
12.1	Com Arte (Linguagens)	32
12.2	Com Física (Ciências da Natureza)	32
12.3	Com Computação (Itinerário Formativo)	33
12.4	Com História (Ciências Humanas)	33
12.5	Com Geografia (Ciências Humanas)	33
13	Referências	33
13.1	Pedagogia e Educação Matemática brasileiras	33
13.2	Pedagogia e Educação Matemática internacionais	34
13.3	Documentos oficiais	34
13.4	Referências técnicas	35
13.5	Referências sobre a matemática brasileira	35
A	Roteiro de demonstração ao vivo do Pixel Round	36
A.1	Abertura e modo 2D	36
A.2	Elipse	36
A.3	Modo 3D e estilos de renderização	37
A.4	Exportação	37
B	Lista de exercícios	38
C	Adaptação para escolas sem laboratório de informática	40
C.1	Substituições por aula	40
C.2	Folhas auxiliares	40

C.3 Aproveitamento de saberes locais	41
D Glossário técnico para o professor	42

1. Identificação e contextualização

Componente curricular	Matemática (com articulação interdisciplinar).
Etapa e ano	Ensino Médio — 3.º ano. Adaptável para 2.º ano e para a Educação de Jovens e Adultos (EJA).
Modalidades atendidas	Regular diurno, regular noturno, EJA, ensino integral, ensino técnico (cursos integrados ao EM nos Institutos Federais e CEFETs).
Carga horária	4 aulas de 50 minutos (200 min em sala) + atividades extraclasse opcionais. Variante de 2 aulas geminadas de 100 min descrita em §8.
Recurso central	Pixel Round — aplicação <i>web</i> gratuita, sem cadastro, sem servidor, executa offline no navegador (PWA). Conforme a LGPD: não coleta nem transmite dados pessoais.
Eixos BNCC	Geometria e Medidas · Números e Álgebra · TCT <i>Cultura Digital</i> (Tema Contemporâneo Transversal).
Itinerários formativos (NEM)	<i>Matemática e suas Tecnologias</i> (principal); <i>Ciências da Natureza e suas Tecnologias</i> (acústica); <i>Linguagens e suas Tecnologias</i> (arte digital). Adequado a unidades curriculares de Aprofundamento e a projetos de Vida e Iniciação Científica.
Articulações	OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) · OBI (Olimpíada Brasileira de Informática) · Feiras de Ciências escolares e regionais.
Conhecimentos prévios do aluno	Plano cartesiano; equação da circunferência (1.º ano); área e volume de figuras elementares (2.º ano); noção de função; proporção e porcentagem.
Preparo do professor	15 minutos de exploração prévia do Pixel Round; leitura de docs_math/Pixel_Round_Math_pt-BR.pdf (documento técnico em português).

Diversidade da escola pública brasileira

Esta sequência foi pensada para o contexto plural do Ensino Médio público brasileiro: a escola estadual urbana de São Paulo, Recife ou Manaus; o Instituto Federal num município do interior; o CEFET; a escola do campo em assentamento de reforma agrária; a escola indígena em terra demarcada; a escola quilombola; a EJA no turno noturno; o programa Pé-de-Meia (Lei 14.818/2024). Cada um desses contextos pede ajustes específicos, mapeados em §8. O Pixel Round foi escolhido porque *atende todos eles*: roda em smartphone de baixo custo, dispensa internet após a primeira carga (PWA), não exige cadastro nem CPF, e não coleta dados pessoais — condição exigida pela LGPD.

2. Justificativa pedagógica

A escolha do Pixel Round como artefato didático para o 3.º ano do Ensino Médio responde a uma demanda **quádrupla** da educação brasileira contemporânea: integrar matemática formal e cultura digital (competência geral 5 da BNCC); contextualizar o conhecimento abstrato em práticas significativas para o estudante; preparar para itens de Geometria Espacial e Funções recorrentes no ENEM; e dialogar com o Novo Ensino Médio (Lei 14.945/2024) no eixo *Matemática e suas Tecnologias*, em especial nos itinerários formativos de Aprofundamento.

O *pixel art* ocupa lugar relevante no imaginário juvenil contemporâneo — presente nos jogos eletrônicos (de Minecraft à produção independente brasileira como *Dandara*, da Long Hat House em Belo Horizonte, ou *Horizon Chase*, da Aquiris Game Studio em São Paulo), nas redes sociais e em produções audiovisuais. Tomá-lo como ponto de partida transforma uma tradição visual familiar em *problema matemático genuíno*: descrever, em uma grade discreta, formas analiticamente definidas sobre $\mathbb{R}$.

Esse movimento didático opera em diálogo com cinco tradições da pedagogia brasileira:

- **Paulo Freire** (*Pedagogia do Oprimido*, 1968; *Pedagogia da Autonomia*, 1996). O ponto de partida é a cultura visual concreta do estudante — e não a abstração da equação — o que aproxima a sequência da noção freireana de *tema gerador*, evitando a *educação bancária*. A construção coletiva do conceito de “critério de pertinência” realiza o que Freire chamou de *problematização*.
- **Ubiratan D’Ambrosio** (*Etnomatemática*, 1985 em diante; ICMI Felix Klein Award, 2005). Diferentes culturas constroem diferentes “modos de fazer” matemática. Os três algoritmos do Pixel Round (Euclidiano, Bresenham, Limiar)

podem ser lidos como três etnomatemáticas distintas para o mesmo problema — recurso poderoso para a escola pública brasileira, onde a diversidade cultural é constitutiva.

- **Anísio Teixeira** (Escola Nova brasileira; fundador do INEP). A defesa da escola pública gratuita, universal e laica, e o princípio de que aprende-se fazendo (*learning by doing*) estruturam todas as atividades práticas da sequência.
- **Darcy Ribeiro** (*Sobre o óbvio*, 1986; idealizador dos CIEPs). A integração entre arte, ciência e técnica no mesmo espaço escolar inspira a articulação interdisciplinar da Aula 9.4.
- **Modelagem Matemática** brasileira (Bassanezi, Burak, Almeida, Caldeira). O Pixel Round materializa o ciclo clássico da modelagem: situação real → modelo matemático → análise computacional → confronto com a realidade → refinamento.

A presença do software cumpre função epistêmica precisa: *não substitui* a álgebra, mas *materializa* a diferença entre formulações matemáticas concorrentes. Os três algoritmos correspondem a três definições matematicamente distintas do mesmo objeto — a circunferência discreta — e produzem desenhos visivelmente diferentes, como ilustra a Figura 1. O aluno percebe, pelos olhos, que *a definição importa*.

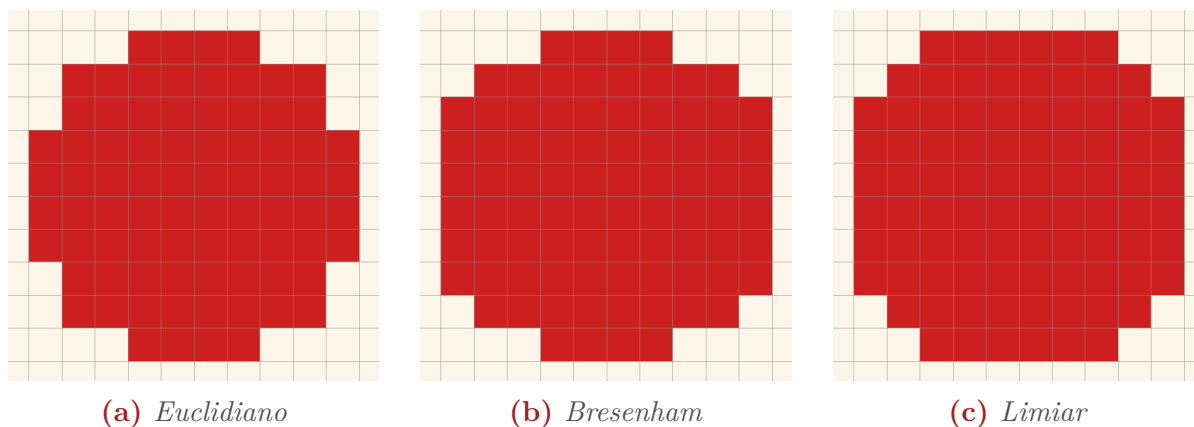


Figura 1: Mesma circunferência de diâmetro 10 sob três critérios de pertinência.

Observe como a célula de canto, a transição entre linhas e os pontos cardeais variam de uma para outra — são três respostas *matematicamente corretas* sob critérios distintos.

Equidade e a realidade material da escola pública

A escolha do Pixel Round responde, em parte, a um problema material concreto: a desigualdade de acesso a recursos digitais entre escolas públicas brasileiras. O Censo Escolar do INEP (2023) registra que somente 65% das escolas públicas de Ensino Médio possuem laboratório de informática em funcionamento, com variação regional acentuada. Por outro lado, o índice de posse de *smartphones* pelos próprios estudantes é alto em todas as regiões (PNAD Contínua TIC 2023 indica mais de 90% entre jovens de 15–17 anos). O Pixel Round foi projetado para funcionar exatamente nesse cenário: *smartphone* de baixo custo, sem internet permanente, sem cadastro — e, quando necessário, o Apêndice C oferece um itinerário *totalmente analógico* para uso exclusivo de papel quadriculado.

3. Objetivos

3.1 Objetivo geral

Conduzir os estudantes a **compreender, comparar e utilizar** as definições formais da circunferência, da elipse e do elipsóide como critérios de inclusão de células em uma malha discreta, mobilizando a equação implícita dessas figuras para explicar, prever e modificar produções visuais autorais em *pixel art* e *voxel art*, em diálogo com o patrimônio cultural visual brasileiro (modernismo, arte concreta, grafismo dos povos originários) e com a tradição matemática nacional. A consciência dessa multiplicidade de respostas válidas conecta-se a uma cultura matemática brasileira que, em 2014, viu **Artur Avila** tornar-se o primeiro latino-americano a receber a Medalha Fields.

3.2 Objetivos específicos

Cognitivos (conceituais):

- identificar a equação implícita $\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$ como caso geral que contém a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$;
- reconhecer que três critérios distintos de pertinência (distância no centro, ponto médio de Bresenham, cobertura de quina) produzem três conjuntos diferentes de células — como já visto na Figura 1;

- compreender a transição da equação 2D para a equação 3D do elipsóide e relacioná-la com o cálculo de volume $V = \frac{4}{3}\pi r_x r_y r_z$ (assunto recorrente no ENEM, eixo *Geometria*);
- interpretar o corte de um sólido por um plano como uma *desigualdade linear* aplicada às coordenadas dos voxels.

Procedimentais:

- operar a interface do Pixel Round em ambos os modos (2D e 3D) e exportar imagens em PNG;
- desenhar manualmente, em papel quadriculado, a aproximação discreta de uma circunferência aplicando o critério euclidiano e verificá-la no software;
- calcular a área discreta de uma elipse contando células e comparar com a área contínua $\pi r_x r_y$, expressando o resultado como erro relativo;
- compor uma figura autoral combinando círculos, elipses e elipsóides com justificativa matemática das escolhas.

Atitudinais:

- cooperar em duplas ou trios na produção das atividades práticas;
- argumentar matematicamente em defesa de uma escolha estética — competência diretamente cobrada na redação do ENEM e em discussões orais de iniciação científica;
- reconhecer que problemas reais admitem mais de uma resposta tecnicamente correta;
- identificar referências matemáticas no patrimônio cultural brasileiro e nos saberes ancestrais.

4. Competências e habilidades da BNCC

A sequência mobiliza diretamente **quatro habilidades** da área de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio, além de articular-se com o Tema Contemporâneo Transversal *Cultura Digital* e com habilidades de Linguagens e Ciências da Natureza.

EM13MAT307

Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e **deduzir expressões** de cálculo para aplicá-las em situações reais, *com ou sem apoio de tecnologias digitais*.

EM13MAT309

Resolver e elaborar problemas que envolvem o **cálculo de áreas totais e de volumes** de prismas, pirâmides e *corpos redondos* em situações reais, *com ou sem apoio de tecnologias digitais*.

EM13MAT308

Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos em variados contextos.

EM13MAT404

Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, **convertendo essas representações de uma para outra**, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Mobilizam-se ainda as *competências específicas* de Matemática:

- **Competência 3** — construir modelos para resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados;
- **Competência 4** — utilizar com flexibilidade diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, computacional);
- **Competência 5** — investigar e estabelecer conjecturas empregando estratégias e tecnologias diversas.

4.1 Articulação com o ENEM

As habilidades acima conectam-se com os seguintes *descritores* da Matriz de Referência do ENEM:

- Competência de Área 2 (*Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade*), com destaque para H7 (geometria plana), H8 (medidas) e H9 (volumes e áreas);

- Competência de Área 3 (*Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano*), descritor H12;
- Competência de Área 5 (*Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas*), descritor H21.

A matriz oficial pode ser consultada no portal do **INEP**, na seção *Avaliação e Exames Educacionais* → *ENEM*.

4.2 Tema Contemporâneo Transversal

O TCT **Cultura Digital** atravessa toda a sequência. Discutem-se questões de *ética digital* (licenças de software livre *vs.* proprietário), *proteção de dados pessoais* (**LGPD, Lei 13.709/2018**), e *produção autoral* (direitos sobre as criações dos estudantes na Aula 9.4).

5. Conteúdos

5.1 Conceituais

- Plano cartesiano e sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; centro de uma célula *vs.* canto.
- Equação reduzida da circunferência: $x^2 + y^2 = r^2$.
- Equação implícita geral da elipse: $\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$.
- Desigualdade da pertinência: *interior*, *exterior* e *fronteira*.
- Equação do elipsóide e da esfera em $\mathbb{R}^3$.
- Volume contínuo do elipsóide: $V = \frac{4}{3}\pi r_x r_y r_z$.
- Planos no espaço como desigualdades lineares (operação de corte).
- Vizinhaça de uma célula (4-conectada em 2D, 6-conectada em 3D).

5.2 Procedimentais

- Traçado manual em papel quadriculado seguindo um critério explícito.
- Operação do Pixel Round (mudança de modo, ajuste de *sliders*, escolha de algoritmo, exportação como PNG).
- Comparação de áreas discreta e contínua por contagem.
- Composição de figuras combinadas (*pixel art* autoral com fundamentação geométrica).

5.3 Atitudinais

- Trabalho cooperativo em duplas ou trios.
- Argumentação fundamentada (justificar escolhas com matemática).
- Ética digital: respeito à licença do software e às produções dos colegas.
- Valorização de referências matemáticas presentes em saberes brasileiros.

5.4 Modos de renderização e variedade de algoritmos

Além de mudar o algoritmo, o Pixel Round oferece três *modos de renderização* (Preenchido, Fino, Grosso) que produzem visuais distintos para a mesma figura geométrica, como ilustra a Figura 2.

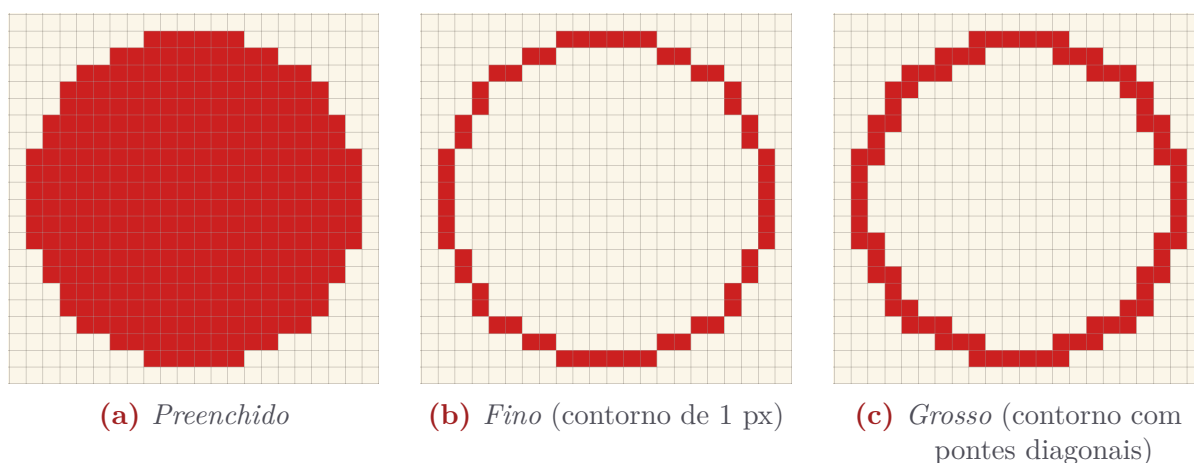


Figura 2: Os três modos de renderização para a mesma circunferência euclidiana de diâmetro 20. O modo *Fino* corresponde ao bordo discreto topológico; o modo *Grosso* adiciona pixels nas diagonais para evitar buracos a 45°.

6. Conhecimentos prévios

A sequência pressupõe contato anterior com:

- Plano cartesiano: localização de pontos (x, y) e (x, y, z) .
- Equação reduzida da circunferência (conteúdo de 1.º ano EM).
- Áreas de polígonos e do círculo; volumes de cubo, prisma e cilindro (conteúdo de 2.º ano EM).
- Conceito de função: domínio, imagem, gráfico.
- Noção de proporção e porcentagem.

Caso a turma demonstre defasagem em algum desses pontos — realidade frequente no contexto pós-pandemia, conforme dados do **SAEB 2023** que mostram queda nos indicadores de Matemática em diversas redes —, a *Aula 1* dispõe de um momento de *nivelamento diagnóstico* (10 min) descrito em §9.1.

7. Recursos e materiais

7.1 Recursos digitais

- Pixel Round (uma instância por estudante *ou* por dupla);
- Projetor multimídia, TV com entrada HDMI ou lousa digital interativa;
- Acesso a *laboratório de informática* *ou* uso de *smartphones* pessoais (BYOD — *Bring Your Own Device*) *ou tablets* distribuídos por programas estaduais.

7.2 Recursos analógicos

- Papel quadriculado (1 cm), 2 folhas por estudante;
- Lápis preto, borracha, régua de 30 cm;
- Lápis de cor ou canetinhas (preferencialmente vermelho #CC2020 e preto);
- Folha de exercícios (Apêndice B);
- Lousa convencional ou quadro branco.

7.3 Livro didático e PNLD

O Pixel Round complementa — não substitui — o livro didático adotado pela escola via **PNLD** (Programa Nacional do Livro e do Material Didático). Coleções recomendadas que cobrem os conteúdos mobilizados:

- *Matemática Contexto e Aplicações* (Luiz Roberto Dante), Ática;
- *Matemática: Ciência e Aplicações* (Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périco, Almeida), Saraiva;
- *Matemática Paiva* (Manoel Paiva), Moderna;
- *Conexões com a Matemática* (Fábio Martins de Leonardo *et al.*), Moderna.

Os capítulos sobre *equação da circunferência*, *cônicas* e *geometria espacial métrica* (volumes) dialogam diretamente com a sequência.

7.4 Acesso ao Pixel Round

Em ordem de preferência:

1. **Hospedado pelo professor** em *GitHub Pages* ou no portal da escola (URL distribuída por QR Code projetado na lousa).
2. **Cópia local** dos arquivos do projeto em uma pasta do laboratório, executada via *file://*.
3. **Offline em *smartphone*** via PWA: basta abrir uma vez com internet para que o navegador instale o aplicativo.

8. Adaptações para a realidade plural brasileira

A escola pública brasileira é heterogênea — talvez a mais heterogênea do mundo entre redes nacionais. Esta sequência foi desenhada para se adaptar a essa pluralidade, com variantes específicas para cada contexto.

8.1 Escolas estaduais urbanas (capital ou região metropolitana)

Cenário típico de São Paulo, Belo Horizonte, Salvador, Fortaleza. Geralmente dispõe de laboratório de informática (uso compartilhado), lousa digital e Wi-Fi razoável. *Configuração mais simples para implementar a sequência integralmente em laboratório.*

8.2 Escolas estaduais urbanas (interior)

Realidade da grande maioria dos municípios brasileiros. Laboratório de informática pode estar parcialmente operacional. Recomenda-se *modelo BYOD* com *smartphones* pessoais dos estudantes, organizados em duplas (um celular por dupla). É a configuração **mais comum** no país.

8.3 Institutos Federais (IFs) e CEFETs

Rede federal de excelência técnica. Geralmente bem equipada. A sequência integra-se naturalmente aos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio (Informática, Eletrônica, Design Gráfico, Multimídia). Recomenda-se aprofundar a Aula 9.2 (algoritmo de Bresenham) com implementação em Python no laboratório.

8.4 Escolas do campo

Cenário do PRONERA (Programa Nacional de Educação na Reforma Agrária) e da Educação do Campo. Tradicionalmente menos equipadas digitalmente, mas com *forte conhecimento prévio geométrico* dos estudantes (geometria aplicada a roçados, cercas, irrigação). Recomenda-se variante analógica (Apêndice C) e dispositivo único do professor para demonstração.

8.5 Escolas indígenas e quilombolas

A [Lei 11.645/2008](#) estabelece a obrigatoriedade do ensino de história e cultura afro-brasileira e indígena. Esta sequência pode ser *enriquecida com saberes próprios da comunidade*: o grafismo Kadiwéu (MS), as cestarias trançadas dos povos Wayuu, Kayapó e Yanomami, a cerâmica marajoara (PA) ou a estatuária Karajá. *O professor de Arte e os anciãos da comunidade são parceiros essenciais nessa adaptação* (ver Aula 9.3, Atividade 9.3).

8.6 Educação de Jovens e Adultos (EJA)

Tipicamente turmas noturnas, com estudantes adultos que retornam à escola. O Pixel Round funciona bem aqui porque a interface é amigável e o tema (pixel art / videogames) é também familiar a essa faixa etária. Sugere-se reduzir o tempo de cada atividade em 20% (em virtude do turno mais curto da EJA) e priorizar discussões orais em vez de produção escrita longa.

8.7 Variante para 2 aulas geminadas (100 min cada)

Para escolas com horário em *módulo duplo* (frequente em IFs e em projetos de tempo integral): Aulas 1+2 num módulo, 3+4 no outro, com 10 min de intervalo no meio de cada módulo.

8.8 Crosswalk com Currículos Referenciais Estaduais

Cada secretaria estadual de educação detalhou a BNCC em seu próprio currículo referencial. As principais redes:

Rede	Currículo de referência		Habilidades equivalentes a EM13MAT307/309
SEDUC-SP	Currículo (2020)	Paulista	Bimestre de Geometria, 3.º EM, eixo <i>Geometria e Medidas</i> .
SEEDUC-RJ	Currículo Mínimo Estadual	Es-tadual	Unidade temática <i>Geometria espacial métrica</i> .
SEE-MG	Currículo de MG	Referência	Eixo <i>Geometria</i> , 3.º EM.
SEDUC-CE	DCRC (Documento Curricular do Ceará)	Referencial	Geometria espacial métrica e analítica.
SEDUC-AM	Currículo do Amazonas	Referência	Geometria com itinerário integrado a <i>Aprofundamento em STEM</i> .

8.9 Ensino híbrido ou remoto

A natureza *web* do Pixel Round o torna trivialmente compatível com aulas remotas (*Google Meet*, *Zoom*, plataformas estaduais como *CMSP* de São Paulo ou *Sala de Aula Digital* de outras redes). O professor compartilha sua tela; estudantes acompanham na própria máquina. As atividades em papel quadriculado podem ser fotografadas e enviadas como tarefa assíncrona via WhatsApp do grupo da turma, Google Classroom ou plataforma da rede.

9. Sequência didática

A sequência segue a estrutura **mobilização — problematização — sistematização — síntese**, inspirada nos *três momentos pedagógicos* de Delizoicov & Angotti (1990) e na tradição freireana de partir do conhecimento prévio do es-

tudante. Cada aula de 50 minutos respeita o ritmo cognitivo do adolescente, alternando momentos expositivos breves (≤ 15 min) com atividades práticas.

9.1 Aula 1 — “Como o computador desenha um círculo com quadradinhos?”

Objetivo da aula

Estabelecer o *problema central* da rasterização discreta como um problema matemático genuíno, mobilizar a equação da circunferência e apresentar o Pixel Round.

1.1 — Mobilização 10 min

Estratégia: *think-pair-share* (pensar individualmente, conversar em dupla, compartilhar com a turma).

Passo a passo:

1. Projetar (ou desenhar) três *sprites* clássicos de *pixel art*: o cogumelo de *Super Mario* (Nintendo, marco do gênero), um Pokémon de primeira geração e um personagem de jogo brasileiro *pixel art*, como *Dandara* (Long Hat House, BH) ou *Horizon Chase* (Aquiris, SP).
2. Perguntar à turma: “Olhem com atenção. O que esses três desenhos têm em comum? O que diferencia o desenho dos jogos do desenho de um círculo feito com compasso na aula passada?”
3. Cada estudante anota individualmente sua resposta (1 min) e em seguida discute com o colega ao lado (2 min).
4. Recolha coletiva: anotar respostas-chave no canto da lousa. Conduzir para a observação fundamental: “o computador só consegue acender quadradinhos — como ele decide quais?”

1.2 — Problematização 15 min

Estratégia: desenho manual confrontado com a definição formal.

Material: papel quadriculado, lápis.

Passo a passo:

1. Cada estudante recebe meia folha de papel quadriculado e marca o ponto central de uma região 11×11 células.
2. Comando: “Pintem o melhor círculo que vocês conseguirem com diâmetro 10 (raio 5). Vocês têm 4 minutos.”
3. Após o tempo, três ou quatro estudantes vão à lousa reproduzir seu desenho em uma malha desenhada com giz/marcador.

4. Observação dirigida pelo professor: “*Olhem. Vocês fizeram a mesma figura? Por quê não? Quem está certo?*”
5. Sistematizar: não há *uma única* resposta (a Figura 1 apresentada na §2 corrobora). Cada estudante adotou implicitamente um **critério** diferente para decidir se uma célula entra ou não.

Nota etnomatemática: aproveitar o momento para mencionar que *essa diversidade de respostas é exatamente o objeto da Etnomatemática* (Ubiratan D’Ambrosio), campo brasileiro reconhecido internacionalmente que estuda como diferentes culturas e grupos resolvem problemas matemáticos de maneiras distintas e igualmente válidas.

1.3 — Sistematização 15 min

Estratégia: exposição dialogada com apoio do quadro.

Conteúdo:

A equação implícita da circunferência centrada na origem de raio r é

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Pontos *dentro* satisfazem $x^2 + y^2 < r^2$; pontos *fora*, $x^2 + y^2 > r^2$. A equação se generaliza para a elipse de semi-eixos r_x, r_y :

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

Em uma malha de pixels, o desafio é decidir quais **células** pertencem ao interior. Decisões diferentes geram desenhos diferentes. O Pixel Round implementa *três* critérios:

- **Euclidiano:** o centro $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ da célula está dentro?
- **Bresenham:** algoritmo histórico de 1965, opera apenas com inteiros.
- **Limiar:** alguma *quina* da célula está dentro?

Demonstração: o professor abre o Pixel Round, ajusta o diâmetro para 10, alterna entre os três algoritmos com a turma observando as diferenças. Sublinhar: as três figuras são *matematicamente corretas* sob critérios distintos.

1.4 — Síntese 10 min

Estratégia: aplicação imediata individual.

Comando: “*Voltem ao papel. Refaçam o círculo de diâmetro 10 aplicando **rigorosamente** o critério euclidiano: pintar a célula se, e somente se, o ponto central dela $(i + 0,5, j + 0,5)$ estiver a uma distância menor ou igual a 5 do centro.*”

Ao final, comparar o desenho do papel com o que o Pixel Round produz no algoritmo Euclidiano com diâmetro 10 — a referência visual é a Figura 1 (a). *Devem coincidir.*

Tarefa de casa (opcional)

Repetir o exercício 1.4 com diâmetros 8 e 14. Trazer os três desenhos na aula seguinte.

9.2 Aula 2 — “Três algoritmos, três desenhos”**Objetivo da aula**

Aprofundar a compreensão dos três algoritmos como definições matemáticas distintas e comparar quantitativamente os resultados.

2.1 — Retomada 5 min

Recolher rapidamente os desenhos da tarefa de casa, observar variações na turma, anunciar o objetivo da aula: “*Hoje vamos olhar para cada um dos três algoritmos com lupa, e descobrir por que Bresenham é considerado uma joia da Computação.*”

2.2 — Algoritmo Euclidiano 10 min

Formalização. Para uma célula (i, j) , calcular as coordenadas normalizadas

$$d_x = \frac{i + \frac{1}{2} - c_x}{r_x}, \quad d_y = \frac{j + \frac{1}{2} - c_y}{r_y}$$

A célula é pintada se, e somente se, $d_x^2 + d_y^2 \leq 1$.

No quadro: resolver explicitamente o caso $c_x = c_y = 5$, $r_x = r_y = 5$, célula $(2, 1)$. Tem-se $d_x = (2,5 - 5)/5 = -0,5$ e $d_y = (1,5 - 5)/5 = -0,7$, portanto $d_x^2 + d_y^2 = 0,25 + 0,49 = 0,74 \leq 1$. Célula *dentro*.

Pedir aos estudantes que testem a célula $(0, 0)$ (qual o resultado?). Discutir.

2.3 — Algoritmo de Bresenham 15 min

Contexto histórico: Jack Bresenham publicou o algoritmo em 1965 quando trabalhava na IBM. Antes dele, traçar uma reta exigia operações em ponto flutuante — caras nos computadores da época. Bresenham mostrou que era possível desenhar usando *apenas inteiros*: somas e comparações.

A versão para circunferência usa um *parâmetro de decisão* d . Começa-se em $(x=0, y=R)$ com $d_0 = 1 - R$. A cada passo no octante 0–45°:

$$\begin{cases} \text{se } d < 0 : & \text{próximo: } (x+1, y), d += 2x + 3 \\ \text{se } d \geq 0 : & \text{próximo: } (x+1, y-1), d += 2(x - y) + 5 \end{cases}$$

Demonstração no quadro: traçar passo a passo o algoritmo para $R = 5$, anotando x, y, d a cada iteração. Os oito octantes são obtidos por simetria.

Conexão com a OBI: o algoritmo de Bresenham é tema clássico em provas da **Olimpíada Brasileira de Informática (OBI)**, organizada pela SBC (Sociedade Brasileira de Computação) na Unicamp. Estudantes interessados podem aprofundar via o material gratuito disponível no portal da OBI.

Observação metodológica: se a turma demonstrar dificuldade com a álgebra do parâmetro d , basta apresentar o algoritmo como uma *regra* (sem demonstrar a função de decisão). A justificativa completa está no documento técnico `Pixel_Round_Math_pt-BR.pdf`, §5.

2.4 — Algoritmo de Limiar 10 min

Para cada célula (i, j) , identificar a *quina mais próxima* do centro da forma:

$$n_x = \text{clamp}(c_x, i, i+1), \quad n_y = \text{clamp}(c_y, j, j+1)$$

A célula é incluída se $\left(\frac{n_x - c_x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y - c_y}{r_y}\right)^2 \leq 0,94$.

Por que 0,94 e não 1? Empiricamente, com 1 aparecem “espinhos” de 1 pixel nos pontos cardeais. O limiar levemente menor elimina o artefato. *Esta é uma decisão de engenharia tomada por inspeção visual* — um exemplo importante de como a matemática teórica nem sempre basta sozinha. Em termos freireanos: a “palavra final” não é da fórmula, mas do diálogo entre teoria e prática.

2.5 — Comparação quantitativa 10 min

Atividade prática em duplas. No Pixel Round (ou no projetor centralizado):

1. Definir diâmetro 20 e modo *Preenchido* (a Figura 3 mostra o resultado esperado para cada algoritmo).
2. Acionar o *Info chip* no canto do canvas. Anotar a área de cada um dos três algoritmos.
3. Calcular a área contínua: $\pi r^2 = \pi \cdot 10^2 \approx 314,16$.
4. Para cada algoritmo, calcular o erro relativo:
$$\frac{|\text{área discreta} - \text{área contínua}|}{\text{área contínua}} \times 100\%.$$
5. Ordenar os três algoritmos do mais próximo ao mais distante do valor contínuo.

Resultado esperado: Euclidiano costuma ficar muito próximo (erro abaixo de 2%); Limiar sobreestima em poucos por cento; Bresenham fica no meio. Confirmar coletivamente.

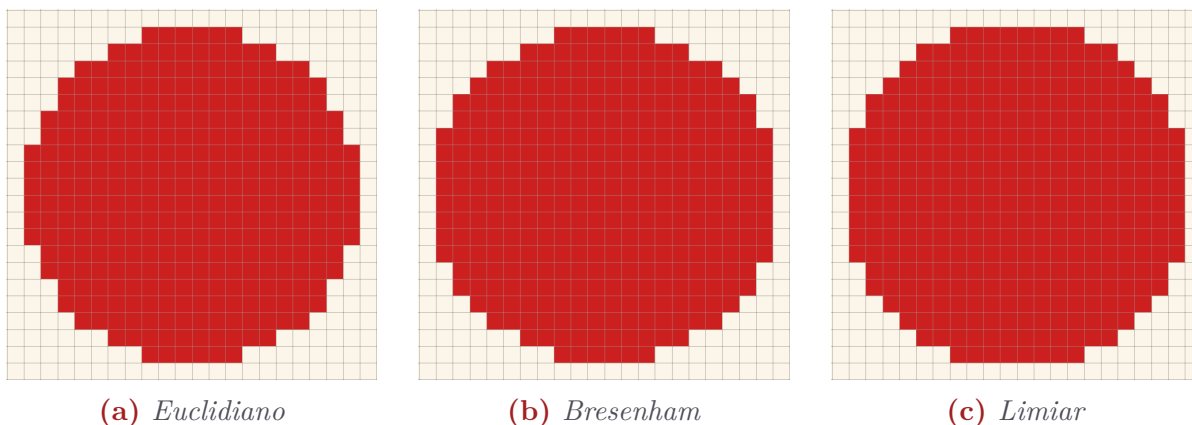


Figura 3: Mesma circunferência de diâmetro 20 nos três algoritmos. O aumento de diâmetro torna as diferenças mais sutis — as três versões parecem semelhantes. É um bom momento para comentar que para diâmetros pequenos (Figura 1) as diferenças são muito mais evidentes.

9.3 Aula 3 — “Da elipse ao elipsóide: a terceira dimensão”

Objetivo da aula

Generalizar a equação da elipse para o elipsóide, introduzir voxels, cálculo de volume discreto e cortes planares. Estabelecer pontes com a tradição visual brasileira.

3.1 — Da equação 2D para 3D 15 min

Acrescentar uma terceira coordenada z ao plano cartesiano. A equação implícita da elipse generaliza-se naturalmente:

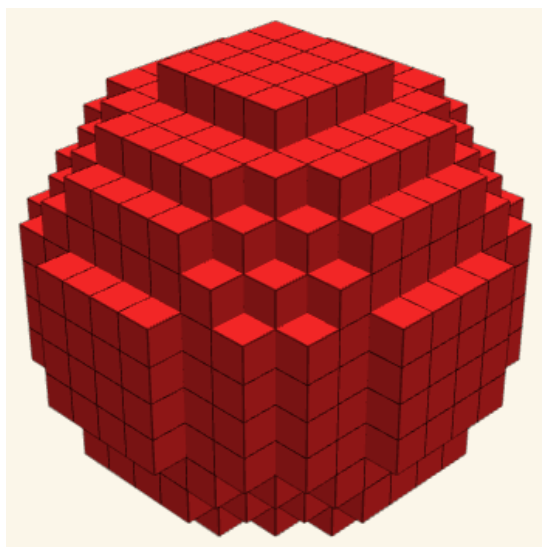
$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

Quando $r_x = r_y = r_z = r$, recupera-se a **esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, como ilustrado na Figura 4.

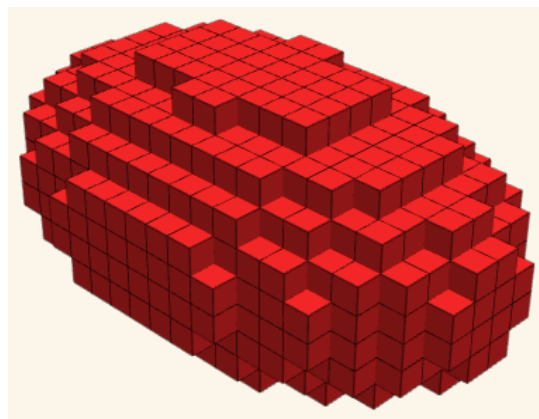
Voxels: a célula de uma malha 3D chama-se *voxel* (*volume element*). O critério de pertinência é exatamente o mesmo do caso 2D, acrescido da coordenada z :

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \leq 1, \quad \text{com } a_\xi = \frac{\xi + \frac{1}{2} - c_\xi}{r_\xi}$$

Demonstração: abrir o Pixel Round no modo 3D, alternar entre Esfera e Elipsóide, rotacionar com o *mouse*, observar a estrutura de voxels.



(a) Esfera de diâmetro 12
($r_x = r_y = r_z = 6$).



(b) Elipsóide com
 $W = 20, H = 10, D = 12$.

Figura 4: Voxelização em 3D. Cada cubo é um voxel; sua coordenada (i, j, k) no centro é testada na equação implícita.

3.2 — Volume contínuo vs. discreto 15 min

O volume contínuo do elipsóide é um resultado clássico:

$$V = \frac{4}{3} \pi r_x r_y r_z$$

Quando $r_x = r_y = r_z = r$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Este é um conteúdo **recorrente no ENEM** (questões de Geometria Espacial cobradas em praticamente todas as edições) e também na fase 2 da **OBMEP**, especialmente em problemas que envolvem aproximação numérica.

Atividade em dupla:

1. Calcular o volume contínuo de uma esfera de diâmetro 12 ($r = 6$): $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 216 \approx 904,78$.
2. No Pixel Round, gerar a esfera $D = 12$ (a mesma da Figura 4(a)), modo *Preenchido*, acionar *Info chip*, anotar o volume discreto (número de voxels).
3. Calcular o erro relativo, como na aula anterior.

Observação: a relação volume discreto/volume contínuo $\rightarrow 1$ quando $D \rightarrow \infty$. Para D pequeno, há divergência sensível — e isso é matematicamente correto: a discretização *de fato* altera a contagem.

3.3 — Cortes planares 10 min

O Pixel Round permite cortar o elipsóide por três planos diferentes. Cada corte é uma **desigualdade linear** aplicada ao centro do voxel:

Eixo X: $x \geq cut \Rightarrow$ voxel descartado

Eixo Y: $y \geq cut \Rightarrow$ voxel descartado

Diagonal: $x + y \geq cut \Rightarrow$ voxel descartado

A Figura 5 ilustra os três cortes a 50%.

Discussão dirigida: “Por que um corte diagonal tem amplitude $D_x + D_y$ e não D_x ? Onde está a hipotenusa?” Conduzir para o reconhecimento de que $x + y$ assume valores entre 0 e $D_x + D_y$ na caixa retangular.

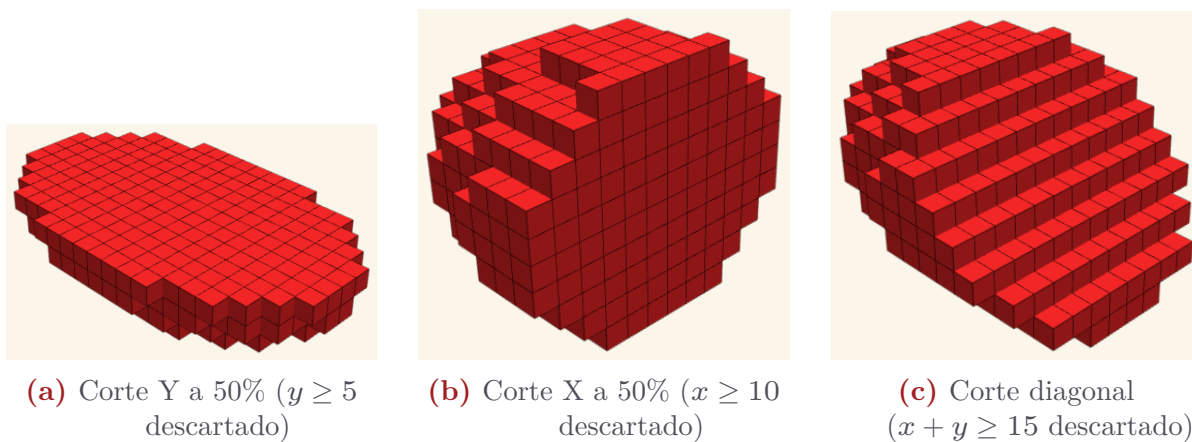


Figura 5: Três cortes planares no mesmo elipsóide ($W = 20, H = 10, D = 12$), todos preservando 50% do volume. Observe o padrão escalonado característico do corte diagonal: ele expõe a hipotenusa que conecta os dois eixos.

3.4 — Diálogo com o patrimônio visual brasileiro 10 min

Conexão com Linguagens e Arte. Esta atividade cumpre as competências da BNCC sobre identidade cultural e patrimônio.

Projetar (ou distribuir impressas) três imagens:

- **Catedral Metropolitana de Brasília** (Oscar Niemeyer, 1970): suas 16 colunas curvas constituem um *hiperboloide de revolução* construído com concreto armado. Junto com o Palácio do Itamaraty, o Memorial JK e o MAC Niterói (este último abertamente elipsoidal, ver Figura 4(b)), Niemeyer realizou em escala arquitetônica exatamente as quádricas que estamos estudando.
- **Grafismo Kadiwéu** (MS): os desenhos corporais e em cerâmica do povo Kadiwéu, descritos por Claude Lévi-Strauss em *Tristes Trópicos* (1955),

são reconhecidos por sua sofisticação geométrica: *simetrias dobradas*, partição do espaço em zonas circulares e quadrangulares justapostas. Tradição matemática viva, anterior à colonização.

- **Cerâmica marajoara** (PA, séculos V–XIV): vasos e estatuetas com motivos circulares concêntricos, espirais e divisões geométricas. Patrimônio arqueológico brasileiro reconhecido pelo IPHAN.

Discussão dirigida: “*Niemeyer projetou em concreto as mesmas curvas que vocês desenharam em pixels. Os povos Kadiwéu e marajoaras representaram círculos e simetrias usando barro, tinta corporal e tecido — séculos antes dos computadores existirem. O problema da rasterização que estudamos não é uma invenção da era digital: é uma constante da história humana. Cada cultura encontrou seu modo de rasterizar.*”

Articulação interdisciplinar: parceria sugerida com o(a) professor(a) de Arte e/ou de História para aprofundamento. A Aula 9.4 pode pedir que os grupos *escolham* qual tradição visual brasileira inspirará seu trabalho.

9.4 Aula 4 — “Projeto final: pixel art autoral com fundamentação matemática”

Objetivo da aula

Mobilizar todo o conteúdo desenvolvido em um produto autoral, avaliando aprendizagem por meio da defesa argumentativa das escolhas matemáticas.

4.1 — Apresentação do desafio 5 min

Comando: “*Em duplas ou trios, vocês vão produzir uma imagem de pixel art ou voxel art que combine, no mínimo, três figuras geradas pelo Pixel Round (círculos, elipses, esferas ou elipsóides). Pode ser um personagem, um ícone, um animal, um logo, uma releitura de uma obra brasileira (Niemeyer, Tarsila, grafismo Kadiwéu) — escolham vocês. Ao final, cada grupo apresentará a obra explicando **matematicamente** as escolhas: por que esse algoritmo? por que essa proporção? por que esse corte?*”

4.2 — Produção 30 min**Material por grupo:**

- Acesso ao Pixel Round (computador ou *smartphone*);
- Papel quadriculado, lápis e canetinhas para esboços;
- Folha-roteiro com três questões obrigatórias (modelo no Apêndice B, exercício 5).

Etapas internas do trabalho de grupo:

1. brainstorm e esboço em papel.
2. produção no Pixel Round e exportação das partes em PNG.
3. montagem final.
4. redação da justificativa matemática no roteiro.

Acompanhamento docente: circular entre os grupos, fazendo perguntas mediadoras — *“por que vocês escolheram esse algoritmo? como esse corte poderia ser descrito por uma desigualdade?”*

4.3 — Apresentação e síntese coletiva 15 min

Cada grupo dispõe de 2 minutos para apresentar a obra à turma, mostrando-a no projetor (ou fisicamente, em papel) e respondendo *ao menos a uma* das três questões matemáticas exigidas.

Critérios mínimos da apresentação:

- identificar pelo menos uma figura matemática presente;
- nomear o algoritmo escolhido e justificar (mesmo *a posteriori*) por que ele se adequa ao efeito visual pretendido;
- se houver corte 3D, descrevê-lo como desigualdade.

Síntese final pelo professor (3 min): retomar a ideia central da sequência — “*em uma malha discreta, a mesma curva contínua admite múltiplas representações; escolher uma é tomar uma decisão matemática*” — e situá-la no horizonte da matemática brasileira contemporânea: convidar a turma a explorar a **OBMEP** e a saber mais sobre Artur Avila.

10. Avaliação

A avaliação adota o modelo **formativo**, **processual** e **somativo**, articulando três dimensões e dialogando com a tradição brasileira da avaliação por habilidades (Sanmartí, 2007; Luckesi, 1990).

10.1 Avaliação diagnóstica

Realizada na Aula 9.1, no momento da Atividade 1.2 (desenho manual do círculo). Permite ao professor identificar dificuldades com plano cartesiano, equação da circunferência e contagem — e contornar lacunas pós-pandêmicas evidenciadas pelo SAEB 2023.

10.2 Avaliação formativa

Distribuída pelas quatro aulas: observação direta da participação, qualidade das respostas no *think-pair-share*, correção *imediata* dos cálculos das Atividades 9.2 e 9.3.

10.3 Avaliação somativa

Composta por duas entregas:

1. **Lista de exercícios** (Apêndice B), 5 questões, entregue ao final da Aula 9.4 ou em data combinada.
2. **Projeto final** (Atividade 9.4), com roteiro respondido na defesa (Atividade 9.4).

10.4 Rubrica de avaliação

Dimensão	Plenamente satisfatório (8–10)	Parcialmente satisfatório (5–7) / Insuficiente (0–4)
Conceitos matemáticos	Aplica corretamente a equação implícita da elipse/elipsóide; reconhece os três critérios algorítmicos e suas diferenças.	Aplica equação básica da circunferência mas confunde-se com a generalização para elipse / não reconhece as diferenças algorítmicas.
Uso do software	Opera o Pixel Round com autonomia em 2D e 3D; exporta imagens; alterna algoritmos e estilos.	Necessita de auxílio frequente; opera apenas 2D.
Argumentação	Justifica matematicamente as escolhas no projeto final; usa vocabulário técnico apropriado (<i>algoritmo</i> , <i>voxel</i> , <i>corte</i> , <i>desigualdade</i>).	Justifica esteticamente, sem mobilizar a matemática; vocabulário ausente.
Cooperação	Trabalha produtivamente em dupla/trio; contribui com a discussão coletiva.	Trabalha isoladamente; pouca contribuição.

10.5 Conversão para notas

- Lista de exercícios: 40% da nota.
- Projeto final + apresentação: 50% da nota.
- Observação processual (participação): 10% da nota.

11. Articulações com o ecossistema matemático brasileiro

A sequência se insere em um *ecossistema rico* de iniciativas brasileiras de educação e pesquisa em matemática, que o professor pode mobilizar como ampliação ou aprofundamento.

11.1 OBMEP — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Fundada em 2005 e organizada pelo **IMPA** (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) em parceria com a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), a **OBMEP** é a maior olimpíada de matemática do mundo: mais de 18 milhões de estudantes inscritos a cada edição, exclusivamente da rede pública.

O conteúdo desta sequência (geometria analítica do círculo e do elipsóide, raciocínio algorítmico, aproximações numéricas) é diretamente preparatório para questões da Fase 2 da OBMEP do nível 3 (Ensino Médio). O professor pode usar provas de edições anteriores como banco de exercícios complementares (a Atividade 9.2 sobre Bresenham conecta-se diretamente a problemas algorítmicos da Fase 2).

11.2 PIC — Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Estudantes medalhistas da OBMEP podem ingressar no PIC, programa de bolsas para iniciação à pesquisa matemática em nível pré-universitário. Vários ex-bolsistas do PIC tornaram-se pesquisadores reconhecidos. Esta sequência pode ser *porta de entrada*: estudantes que se destacam no projeto final da Aula 9.4 podem ser incentivados a participar da próxima edição.

11.3 Artur Avila e o IMPA

Em 2014, **Artur Avila** tornou-se o *primeiro brasileiro e o primeiro latino-americano a receber a Medalha Fields* — a mais alta honraria da matemática mundial, equivalente ao Nobel. Pesquisador do **IMPA**, Avila representa o reconhecimento internacional da escola matemática brasileira. *Mencionar Avila na síntese final da Aula 9.4 (Atividade 9.4) cumpre função simbólica importante: comunicar a estudantes da rede pública que a carreira matemática brasileira chegou ao topo do mundo.*

11.4 OBI — Olimpíada Brasileira de Informática

Organizada pela SBC (Sociedade Brasileira de Computação) na Unicamp, a **OBI** tem fases regionais que tradicionalmente envolvem algoritmos clássicos como o de Bresenham (tratado na Atividade 9.2). Aprofundamento natural para estudantes interessados em computação.

11.5 Etnomatemática (D'Ambrosio)

A linha de pesquisa em Etnomatemática, fundada pelo brasileiro **Ubiratan D'Ambrosio** (1932–2021), recebeu o ICMI Felix Klein Award (2005) — maior distinção mundial em Educação Matemática. A noção de que diferentes culturas possuem *matemáticas diferentes igualmente válidas* fundamenta filosoficamente esta sequência. Bibliografia inicial: D'Ambrosio (2001), *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*, Autêntica.

11.6 PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), oferecido pela SBM em parceria com universidades brasileiras, é a principal via de formação continuada para professores de Matemática da Educação Básica no Brasil. Esta sequência pode servir de base para um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de PROFMAT.

12. Articulações interdisciplinares

12.1 Com Arte (Linguagens)

A produção de *pixel art* é tradicionalmente abordada como linguagem artística. O Pixel Round oferece uma oportunidade rara de articular Matemática e Arte sob o mesmo objeto: a figura *é simultaneamente* uma equação e uma composição estética. Sugestão: parceria com docente de Arte para uma exposição final dos trabalhos no mural ou nas redes sociais da escola. Aprofundamento possível: estudo das obras concretistas e neoconcretistas brasileiras (Waldemar Cordeiro, Lygia Clark, Hélio Oiticica) e do projeto modernista de Tarsila do Amaral.

12.2 Com Física (Ciências da Natureza)

A camada sonora do Pixel Round usa síntese aditiva de ondas senoidais. As frequências escolhidas aproximam notas musicais do **temperamento igual de 12 tons** (cada semitom multiplica a frequência por $2^{1/12} \approx 1,0595$). Conteúdo articulado com *Ondas mecânicas*, *Acústica* e *Funções exponenciais*.

12.3 Com Computação (Itinerário Formativo)

O algoritmo de Bresenham é uma referência clássica da Ciência da Computação. Articular com aulas eventuais de *pensamento computacional*: *abstração* (a equação como modelo), *decomposição* (a forma como conjunto de células), *reconhecimento de padrões* (simetrias), *algoritmização* (os três procedimentos). Conexão direta com a **OBI** e com os itinerários formativos de Aprofundamento em *Computação e Programação*.

12.4 Com História (Ciências Humanas)

Bresenham publicou o algoritmo em 1965, durante o auge da computação *main-frame* na IBM. No mesmo período, o Brasil dava seus primeiros passos em computação: o computador *Lourinha*, desenvolvido em São Paulo em 1961, e o *Patinho Feio*, primeiro computador desenvolvido no Brasil, na USP em 1972.

12.5 Com Geografia (Ciências Humanas)

A rasterização não é tópico apenas de pixel art: é a base de *sistemas de informação geográfica* (SIG, ou GIS). Mapas digitais, imagens de satélite (o programa CBERS, parceria Brasil–China), monitoramento do desmatamento no INPE são exemplos contemporâneos brasileiros do mesmo problema matemático que a sequência aborda.

13. Referências

13.1 Pedagogia e Educação Matemática brasileiras

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Tese, UNICAMP, 1992.
- D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A. *Metodologia do ensino de Ciências*. São Paulo: Cortez, 1990.
- FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1968.

- FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 1990.
- RIBEIRO, D. *Sobre o óbvio*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1986.
- SANMARTÍ, N. *Avaliar para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- SAVIANI, D. *Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações*. Campinas: Autores Associados, 2008.
- TEIXEIRA, A. *Educação não é privilégio*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1957.

13.2 Pedagogia e Educação Matemática internacionais

- LAKATOS, I. *Provas e refutações: a lógica do descobrimento matemático*. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995 [orig. 1945].
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.
- VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1989 [orig. 1934].

13.3 Documentos oficiais

- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2018. Disponível no [portal do MEC](#).
- BRASIL. *Lei 14.945/2024*, que altera o Novo Ensino Médio. Brasília: Casa Civil, 2024.
- BRASIL. *Lei 13.709/2018* (LGPD — Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais). Brasília: Casa Civil, 2018.
- BRASIL. *Lei 11.645/2008*, que obriga o ensino de história e cultura afro-brasileira e indígena. Brasília: Casa Civil, 2008.

- INEP. *Sinopse Estatística da Educação Básica 2023*. Brasília: INEP, 2024. <https://www.gov.br/inep/>.
- INEP. *Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias — ENEM*. Brasília: INEP, 2024.

13.4 Referências técnicas

- BRESENHAM, J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, v. 4, n. 1, p. 25–30, 1965.
- PITTEWAY, M. L. V. Algorithm for drawing ellipses or hyperbolae with a digital plotter. *The Computer Journal*, v. 10, n. 3, p. 282–289, 1967.
- Pixel Round — documento técnico: docs_math/Pixel_Round_Math_pt-BR.pdf.

13.5 Referências sobre a matemática brasileira

- VIANA, M. *Por que a matemática é importante (e divertida)*. Rio de Janeiro: Tinta-da-China, 2022.
- OBMEP. Provas e bancos de questões anteriores. Disponíveis em <https://www.obmep.org.br/>.
- SBM. *Revista do Professor de Matemática* (RPM). Diversos números, disponível em <https://rpm.org.br/>.
- LÉVI-STRAUSS, C. *Tristes Trópicos*. São Paulo: Companhia das Letras, 1996 [orig. 1955]. (Capítulo sobre os Kadiwéu, fundamental para a Atividade 9.3.)

A. Roteiro de demonstração ao vivo do Pixel Round

Sequência recomendada para a demonstração inicial (Atividade 1.3) e para a familiarização do professor. Tempo total: 15 minutos.

A.1 Abertura e modo 2D

1. Abrir o Pixel Round. Observar com a turma os elementos visíveis: barra superior, área central de desenho (*canvas*), controles laterais.
2. Confirmar que o modo está em **2D / Círculo**.
3. Ajustar o *slider* de *Tamanho* para 10. Observar a figura (compare com a Figura 1 (a) deste plano).
4. No canto inferior do *canvas*, acionar o botão *Info chip*. A turma deverá ler em voz alta: “Diâmetro 10, Raio 5, Área ... , Algoritmo Euclidiano”.
5. Alternar entre os três algoritmos clicando nas *pills* **Euclidiano** / **Bresenham** / **Limiar**. Pausar em cada um por 30 segundos.

A.2 Elipse

1. Trocar a forma para **Elipse**. Aparecem dois *sliders*: *Largura* e *Altura*.
2. Definir $W = 24$, $H = 12$. Observar a forma alongada — a Figura 6 mostra o resultado.
3. Discutir: “A equação que rege essa forma é $(x/12)^2 + (y/6)^2 = 1$. Por que dividimos x por 12 e y por 6?”

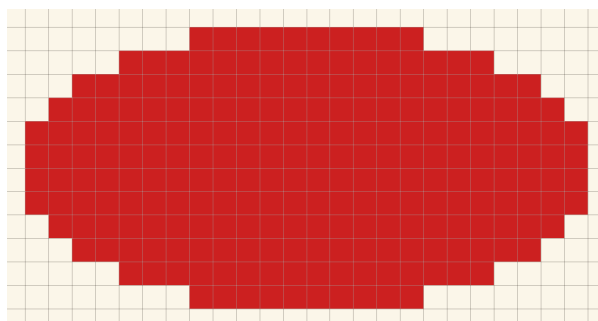


Figura 6: Elipse $W = 24$, $H = 12$ no Pixel Round. Note como as células ao longo do eixo maior são mais espaçadas que ao longo do eixo menor — reflexo direto dos semi-eixos diferentes.

A.3 Modo 3D e estilos de renderização

1. Trocar o modo para **3D / Esfera**, tamanho $D = 12$ (cf. Figura 4(a)).
2. Arrastar com o *mouse* para rotacionar. Aparece uma esfera composta de voxels.
3. Acionar o *Info chip*: anotar o volume.
4. Trocar para **Elipsóide**, $W = 20$, $H = 10$, $D = 12$ (cf. Figura 4(b)).
5. Demonstrar o *slider Cut* no eixo Y, 50% (ver Figura 5(a)). Observar a metade superior desaparecer.
6. Alternar para o eixo diagonal $\swarrow / \nearrow$ (45° , Figura 5(c)). Discutir o corte oblíquo.
7. Testar os três *estilos 3D* (**Clássico**, **Suave**, **Blocos**) — a Figura 7 mostra a diferença.

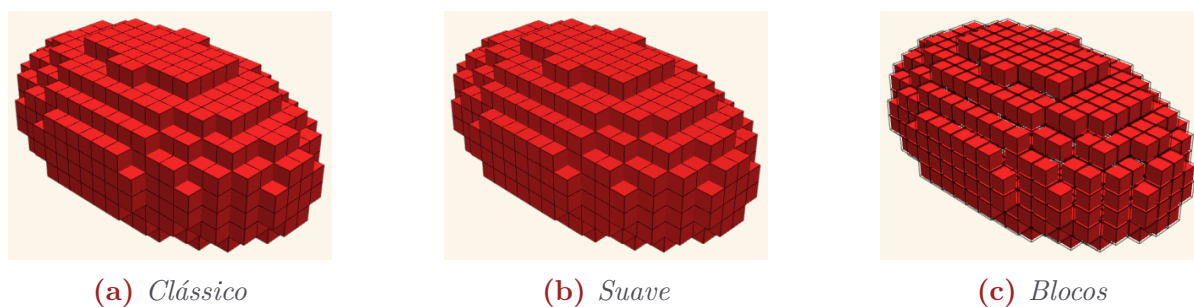


Figura 7: Três estilos de sombreamento 3D para o mesmo elipsóide. *Clássico* marca bem luz e sombra; *Suave* reduz o contraste para um aspecto mais uniforme; *Blocos* introduz reentrância geométrica nas faces, útil para visualizar a estrutura cúbica.

A.4 Exportação

1. Mostrar o botão de *download* no canto do canvas.
2. Clicar e demonstrar o salvamento como PNG.
3. Observar: o PNG sai em alta resolução, ideal para imprimir, projetar ou colar em redações multimodais (incluindo as do ENEM).

B. Lista de exercícios

Instruções: responder individualmente. Pode-se consultar o Pixel Round para confirmar respostas, *mas a justificativa matemática é obrigatória*. Entregar manuscrita ou digitada.

Exercício 1 — Equação da circunferência

Enunciado: Considere uma circunferência centrada na origem $(0,0)$ com raio $r = 7$. Verifique se cada um dos pontos a seguir está *dentro*, *fora* ou *sobre* a circunferência. Justifique com a equação.

- | | |
|--------------|---|
| a) $(3, 4)$ | <i>gabarito:</i> dentro ($9 + 16 = 25 < 49$). |
| b) $(5, 5)$ | <i>gabarito:</i> fora ($25 + 25 = 50 > 49$, pois $\sqrt{50} \approx 7,07$). |
| c) $(0, 7)$ | <i>gabarito:</i> sobre. |
| d) $(-7, 0)$ | <i>gabarito:</i> sobre. |

Atenção pedagógica: o item (b) é uma armadilha proposital.

Exercício 2 — Critério euclidiano em uma célula

Enunciado: Uma circunferência tem centro em $(5, 5)$ e raio 5. Aplique o critério euclidiano à célula $(i, j) = (1, 3)$: ela é pintada?

Gabarito: centro da célula em $(1,5, 3,5)$. Distância ao centro da circunferência: $\sqrt{(5-1,5)^2 + (5-3,5)^2} = \sqrt{12,25 + 2,25} = \sqrt{14,5} \approx 3,81$. Como $3,81 < 5$, a célula é **pintada**.

Exercício 3 — Área discreta vs. contínua

Enunciado: No Pixel Round, gere um círculo de diâmetro $D = 20$ no algoritmo Euclidiano (cf. Figura 3(a)). Anote a área discreta (em pixels). Calcule a área contínua: πr^2 . Calcule o erro relativo. Em seguida, repita para o algoritmo *Limiar* (Figura 3(c)). Compare.

Gabarito esperado: a área contínua é $\pi \cdot 100 \approx 314,16$. O Euclidiano costuma aproximar com erro abaixo de 2%. O *Limiar* costuma sobreestimar em 5–8%.

Exercício 4 — Volume do elipsóide e corte (estilo ENEM)

Enunciado: Considere um elipsóide com semi-eixos $r_x = 4$, $r_y = 6$, $r_z = 3$.

- a) Calcule o volume contínuo.
- b) Após um corte no eixo Y que preserve 50% da altura (Figura 5(a)), qual o volume restante (continuamente)?
- c) Descreva matematicamente o corte como uma desigualdade aplicada à coordenada y do voxel.

Gabarito: (a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 = 96\pi \approx 301,59$. (b) Pela simetria, metade: $\approx 150,80$. (c) $y < cut$, onde $cut = 0,5 \cdot D_y = 0,5 \cdot 12 = 6$.

Exercício 5 — Roteiro do projeto final

Enunciado: Após produzir a imagem autoral em grupo (Atividade 9.4), responda:

- (1) Liste as figuras geométricas usadas (círculo, elipse, esfera, elipsóide) e seus parâmetros (diâmetro ou semi-eixos).
- (2) Para a figura principal, qual algoritmo foi escolhido? Por quê? Que efeito visual ele produz que os outros dois não produziram? (Compare com as Figuras 1 e 3.)
- (3) Houve cortes 3D? Se sim, descreva matematicamente *um* deles como desigualdade.
- (4) (*Opcional*) Sua produção dialoga com alguma referência cultural brasileira (modernismo, arte concreta, grafismo indígena, arquitetura de Niemeyer)? Comente.

C. Adaptação para escolas sem laboratório de informática

Esta adaptação possibilita aplicar a sequência *integralmente em papel* quando o acesso a computador estiver inviabilizado — realidade frequente em escolas do campo, escolas indígenas e quilombolas, em comunidades ribeirinhas da Amazônia, e em escolas estaduais de pequenos municípios. O eixo conceitual permanece intacto; o que muda é o suporte material.

C.1 Substituições por aula

Aula	Atividade original	Adaptação analógica
1	Demonstração do Pixel Round (1.3)	Professor desenha à mão três versões da circunferência $D = 10$ em uma malha pré-impressa do tamanho da lousa — uma por algoritmo. As Figuras 1 e 3 deste plano podem ser impressas como referência.
2	Comparação quantitativa no software (9.2)	Distribuir folhas com as três circunferências de $D = 16$ pré-desenhadas (impressas das Figuras deste plano) e pedir a contagem manual.
3	Geração da esfera 3D (9.3, 9.3)	Distribuir folhas com <i>fatias</i> da esfera ($z = 0, 1, 2, \dots$) em papel quadriculado. O estudante constrói o modelo mental por empilhamento.
4	Produção no Pixel Round (9.4)	Produção <i>exclusivamente</i> em papel quadriculado com lápis de cor. A defesa matemática (9.4) permanece idêntica.

C.2 Folhas auxiliares

Para a versão analógica completa, recomenda-se preparar previamente:

- 1 folha A3 com malha 30×30 desenhada com régua, para uso na lousa magnética ou afixada na parede.
- 1 conjunto por estudante de 4 folhas A4 quadriculadas (5 mm) — itens consumíveis previstos no kit escolar do PDDE.
- 1 folha com as três circunferências comparativas pré-impressas: as Figuras 1 ($D=10$) e 3 ($D=20$) deste plano, em A4, servem como referência.

C.3 Aproveitamento de saberes locais

Em escolas indígenas ou em comunidades com forte tradição artesanal (renda de bilro em Aracati/CE, cerâmica em Pirenópolis/GO, tecelagem caiçara no litoral norte de SP), a Aula 9.3 pode ser *enriquecida com uma visita de portadores de saber tradicional*: rendeiras, tecelãs, ceramistas, mostrando como rasterizam círculos em suas linguagens próprias. Essa aproximação realiza o princípio etnomatemático e a Lei 11.645/2008.

Observação geral: a versão analógica preserva 100% dos objetivos conceituais; apenas a fluência operacional (*exportar PNG, alternar algoritmos com um clique*) é trabalhada de modo limitado. Caso a escola venha posteriormente a obter acesso ao laboratório, uma *aula de complementação* de 30 minutos é suficiente.

D. Glossário técnico para o professor

- **Algoritmo** — sequência finita e bem definida de instruções para resolver um problema. Os três algoritmos do Pixel Round (cf. Figura 1) são procedimentos distintos para o mesmo problema.
- **Bresenham (algoritmo de)** — algoritmo publicado em 1965 por Jack Bresenham (IBM), originalmente para reta, depois estendido por outros autores (Pitteway, Kappel) para elipse. Sua marca é usar *apenas inteiros*. Veja Atividade 9.2.
- **BNCC** — Base Nacional Comum Curricular. Documento normativo brasileiro de referência para a Educação Básica, aprovado em 2017 (EI/EF) e 2018 (EM).
- **Canvas** — elemento HTML que disponibiliza um espaço de desenho 2D ou 3D no navegador. Pixel-by-pixel ou via WebGL.
- **ENEM** — Exame Nacional do Ensino Médio. Maior avaliação educacional do Brasil, com participação anual de milhões de estudantes. Articulação detalhada em §4.1.
- **Equação implícita** — equação da forma $F(x, y) = 0$, em que a curva é definida pelo zero da função. A da elipse: $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 - 1 = 0$.
- **Etnomatemática** — campo de estudos fundado pelo brasileiro Ubiratan D'Ambrosio. Ver §11 e Atividade 9.3.
- **IMPA** — Instituto de Matemática Pura e Aplicada (<https://impa.br>). Centro de pesquisa de referência mundial sediado no Rio de Janeiro. Organizador da OBMEP.
- **LGPD** — Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais ([Lei 13.709/2018](#)).
- **OBMEP** — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (<https://www.obmep.org.br>). Maior olimpíada de matemática do mundo. Detalhes em §11.
- **Pixel** — abreviação de *picture element*. Unidade mínima de uma imagem digital. Em uma malha, ocupa uma célula 1×1 .
- **PWA** — *Progressive Web App*. Aplicação *web* instalável e operável *offline*.
- **Rasterização** — processo de converter uma descrição geométrica contínua em uma matriz de pixels (no caso 2D) ou voxels (no caso 3D).

- **Semi-eixo** — em uma elipse de centro C , é a distância do centro à extremidade da elipse na direção do eixo correspondente. A circunferência é o caso particular em que $r_x = r_y = r$.
- **Temperamento igual de 12 tons** — divisão da oitava em 12 intervalos iguais (semitons), de modo que a razão de frequências entre dois semitons sucessivos é $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$. É a base do sistema musical ocidental moderno — inclusive do samba, do choro e da MPB tradicional.
- **Voxel** — abreviação de *volume element*. Generalização do pixel para 3D: célula cúbica $1 \times 1 \times 1$ em uma malha tridimensional (Figura 4).
- **WebGL** — biblioteca de programação gráfica em 3D para navegadores. Usada pelo Pixel Round (via *three.js*) para renderizar a cena 3D.

— fim do plano de aula —