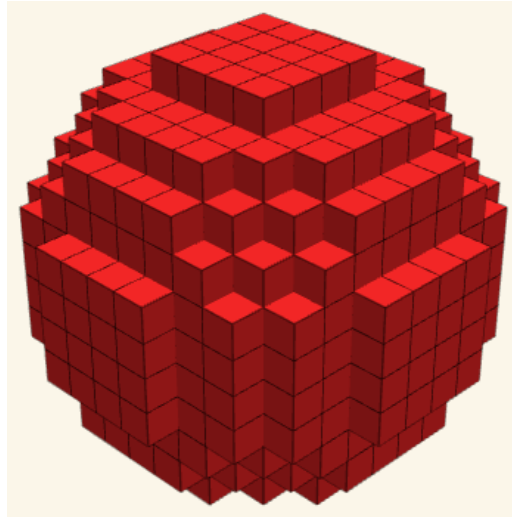


Pixel Round

수업지도안

고등학교 3 학년수학

오픈소스 *Pixel Round* 프로그램을 활용한 대한민국 고등학교 3 학년수학수업의 4 차시단원구성안. 연속적인곡선을 유한한픽셀격자위에어떻게표현할것인가라는하나의본질적질문을중심으로해석기하, 알고리즘적사고, 예술적 표현을통합적으로다룬다. 2022 개정교육과정의수학과 “기하” 과목과 “인공지능수학” 과목에부합한다.



Pixel Round 로복셀화된지름 12 구.

교과융합: 수학 · 정보 · 미술 · 물리학

근거: 2022 개정교육과정 (교육부고시제 2022-33 호) · 디지털새싹정책

목 차

1	단원개요	4
2	단원설정이유	4
3	단원의학습목표	6
3.1	본질적이해	6
3.2	지식·이해	6
3.3	과정·기능	6
3.4	가치·태도	7
4	2022 개정교육과정과의연계	7
4.1	6 대핵심역량과의연결	8
5	학습내용	8
5.1	지식·이해요소	8
5.2	과정·기능요소	9
6	선수학습점검	9
7	교수·학습자료및환경	9
7.1	디지털자료	9
7.2	비디지털자료	10
7.3	Pixel Round 배포방법	10
8	학습분량조정과다양성존중	10
8.1	학습이느린학생	10
8.2	심화학습희망학생	11
8.3	100 분블록수업변형	11
8.4	원격·혼합수업	11
9	수업지도의실제	11
9.1	1 차시 — “컴퓨터는어떻게사각형으로원을그리는가?”	11
9.2	2 차시 — “세알고리즘, 세그림”	13
9.3	3 차시 — “타원에서타원체로:3 차원으로의도약”	16
9.4	4 차시 — “최종프로젝트: 창의적픽셀작품과수학적변호”	20
10	평가	22
10.1	진단평가	22
10.2	형성평가	22

10.3	총괄평가	22
10.4	평가루브릭	23
10.5	학기성적반영 (권장)	23
11	교과융합과진로연계	23
11.1	정보교과와의융합	23
11.2	미술교과와의융합	23
11.3	물리교과와의융합	24
11.4	진로연계 — 미래융합인재	24
12	참고문헌	24
A	Pixel Round 시연대본	26
A.1	시작과 2D 모드	26
A.2	타원	26
A.3	3D 모드	26
A.4	내보내기	27
B	학습지	28
C	디지털기기부족환경대안	30
C.1	차시별대체	30
C.2	준비물 (일회성)	30
C.3	학교유형별조정	30
D	교사용용어집	31

1. 단원개요

교과·과목	수학 (선택중심: 기하, 미적분, 인공지능수학).
학년	고등학교 3 학년. 고 2 학생에게도 변형 적용 가능.
학교유형	일반계공립고등학교중심. 특목고·자사고·특성화고를 위한 변형은 부록 C 참조.
수업시수	50 분 × 4 차시 (총 200 분). 100 분 블록 수업 변형은 §8 참조.
중심자료	Pixel Round — 무료 웹 애플리케이션. 회원가입 불필요, 서버 불필요, PWA 로 오프라인 동작. 개인정보를 일체 수집하지 않아 학교 디지털 기기에 안전하게 적용 가능.
교육과정연계	2022 개정 교육과정 수학과의 기하 (이차곡선, 공간도형), 미적분 (입체의 부피), 인공지능 수학 (행렬과 알고리즘).
교과융합	정보 (알고리즘과 Python), 미술 (디지털 매체 표현), 물리학 (파동과 소리).
선수학습	좌표 평면과 좌표 공간, 원의 방정식, 입체 도형의 부피, 함수 개념, 비율과 백분율.
교사준비	Pixel Round 직 접 조 작 15 분; docs_math/Pixel_Round_Math_ko-KR.pdf 읽기.

실시환경에 관한 고려

본 지도안은 대한민국 일반 고등학교의 실제 환경을 고려하여 설계되었다. 대부분의 학교는 디지털 새싹 정책과 스마트 학교 사업을 통해 1인 1태블릿 또는 1인 1크롬북 환경을 갖추고 있으며, 모든 교실에 디지털 칠판이 설치되어 있다. Pixel Round는 어떠한 회원가입도 데이터 전송도 없이 동작하므로, 개인정보 보호법 및 학교 생활 기록부 작성·관리 지침의 데이터 보호 요건을 모두 충족한다. 디지털 기기 사용이 제한되거나 인터넷 환경이 불안정한 경우, 부록 C의 완전 종이 기반 대안으로 본 단원의 핵심 학습을 동일하게 수행할 수 있다.

2. 단원설정이유

픽셀아트와 복셀아트는 현재 한국 청소년의 시각 문화에서 핵심적인 위치를 차지한다. 마인크래프트, 스타듀밸리, 한국인디게임 (예: 스토리오브시즌즈, 메이플스토리), 웹툰의 디지털 이미지 표현, 케이팝 뮤직 비디오의 픽셀 효과까지, 학생들은 일상적으

로 픽셀격자표현에 둘러싸여 있다. 본 단원은 이 일상의 시각경험을 **수학적 탐구의 대상**으로 전환한다. 즉, 컴퓨터는 정사각형셀만 켜고 끌 수 있는데, 어떻게 매끄러운 곡선을 표현하는가?

본 지도안은 다음 세 가지 이론적 토대 위에 세워졌다.

- **2022 개정 교육과정의 6 대 핵심역량**. 자기관리역량, 지식정보처리역량, 창의적사고역량, 심미적감성역량, 협력적소통역량, 공동체역량을 모두 자연스럽게 통합한다.
- **탐구형수업** (질문 → 사고 → 모듬토의 → 공유 → 정리)의 5 단계구조. 각차시는 이 흐름을 변주하여 학생이 주도하는 학습을 구현한다.
- **킬러문항을 넘어선 사고력중심평가**. 교육부의 2023년 킬러문항배제방침과 그 이후의 수능출제방향변화에 맞추어, 단편적문제풀이가 아니라 개념의구조적이해를 평가의 핵심으로 둔다.

수능및학종과의관계

본단원은수능직접대비를목적으로하지않지만, 다음과같은부수적효과를가진다. (1) 기하과목 “이차곡선” 과 “공간도형” 은수능 기하영역의핵심출제단원이다. (2) 미적분과목의 “입체의부피” 는수능 미적분영역에서주기적으로출제된다. (3) 프로젝트결과물과발표영상은 학생부종합전형의 교과학습발달상황세부능력및특기사항 (이른바 “세특”) 의우수한기록사례가된다. 특히 “수학을활용한창의적산출물” 에대한기록은자기소개서폐지이후더욱중요해진학생부항목이다.

3. 단원의학습목표

3.1 본질적이해

학생은 **연속적인수학적대상을이산적격자위에표현하는것은그자체로하나의수학적판단이며, 여러가지타당한답이존재할수있음** 을이해한다. 또한각각의판단이 “셀의중심”, “정수알고리즘”, “모서리점포함” 등정밀한기준으로형식화될수있음을인식한다.

3.2 지식·이해

- 장축·단축의길이를 r_x, r_y 로하는타원의음함수방정식 $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 = 1$ 을 이해하고, 원이 $r_x = r_y$ 인특수한경우임을안다.
- 세가지픽셀판정알고리즘 (유클리드거리, 브레젠햄중점법, 임계값법) 의수학적정의와차이를안다.
- 2 차원타원방정식을 3 차원타원체방정식으로일반화한다.
- 입체의평면절단을복셀좌표에대한 일차부등식으로해석한다.

3.3 과정·기능

- Pixel Round 를 2D 와 3D 모두에서자유롭게조작하고 PNG 이미지로내보낼수 있다.
- 모눈종이에명시된판정규칙에따라손으로이산원을그리고소프트웨어출력과비교할수있다.

- 셀개수를세어타원의이산넓이를구하고, 연속넓이 $\pi r_x r_y$ 와비교하여상대오차를계산할수있다.
- 원·타원·구·타원체를결합한창의적픽셀작품을구성하고, 그선택을수학적언어로설명할수있다.

3.4 가치·태도

- 모둠활동에서타인의의견을존중하며협력적으로소통한다.
- 미학적선택을수학적근거로변호할수있는자신감을기른다.
- 동일한현실문제에 여러가지기술적으로옳은답이있을수있음을받아들인다.

4. 2022 개정교육과정과의연계

본단원은 2022 개정교육과정 **수학과 “기하”, “미적분 II”, “인공지능수학”** 의성취기준에직접적으로부합한다.

기하 — 이차곡선

이차곡선 (타원, 쌍곡선, 포물선) 의방정식을이해하고, 도형의성질을다양한상황에적용한다. 본단원에서는타원이핵심대상.

미적분 II — 입체의부피

입체도형의부피를정적분을이용하여구할수있다. 회전체로서의타원체의부피를다룬다.

인공지능수학 — 행렬과알고리즘

알고리즘을수학적으로표현하고그효율성을비교한다. 브레젠헴알고리즘의정수연산효율성을분석.

정보 — 알고리즘과프로그래밍

문제해결을위한알고리즘을설계하고프로그래밍언어로구현한다. 브레젠함을 *Python* 으로구현 (선택).

4.1 6 대핵심역량과의연결

- **지식정보처리역량:** Pixel Round 의데이터를분석하여세알고리즘의차이를정량화한다.
- **창의적사고역량:** 최종차시의독창적픽셀작품설계.
- **심미적감성역량:** 미학과수학의융합경험.
- **협력적소통역량:** 모둠활동, 발표, 수학적변호.
- **자기관리역량:** 학습과정의자기점검.
- **공동체역량:** 작품의학교공동전시·공유.

5. 학습내용

5.1 지식·이해요소

- 직교좌표계와좌표공간. 셀의중심과모서리의구분.
- 원의표준방정식: $x^2 + y^2 = r^2$.
- 타원의음함수방정식: $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 = 1$.
- 포함부등식: 내부, 외부, 경계.
- 좌표공간에서의타원체와구의방정식.
- 타원체의부피: $V = \frac{4}{3}\pi r_x r_y r_z$.
- 좌표공간의평면을일차부등식으로표현하기 (절단연산).
- 셀의이웃 (2D 4-이웃, 3D 6-이웃).

5.2 과정·기능요소

- 명시된판정규칙에따라모눈종이에손으로그리기.
- Pixel Round 조작 (모드전환, 슬라이더조정, 알고리즘선택, PNG 내보내기).
- 셀세기를통한이산넓이와연속넓이의비교.
- 여러기본형태를결합한창의적구성.

6. 선수학습점검

본단원은다음사전지식을전제한다:

- 좌표평면과좌표공간에서의점의표시 (수학 “상”).
- 원의방정식 (수학 “하”).
- 다각형과원의넓이, 입체도형의부피 (중학교 3 학년 고등학교 1 학년).
- 함수개념: 정의역, 치역, 그래프.
- 비율과백분율, 상대오차개념.

부족한학생이있는경우, 1 차시도입부분에 10 분진단활동을배치할수있다 (§9.1 참조).

7. 교수·학습자료및환경

7.1 디지털자료

- Pixel Round (학생당또는짝당 1 대);
- 빔프로젝터또는전자칠판;
- 학교보급노트북·태블릿·크롬북 또는 BYOD (학생개인스마트폰).

7.2 비디지털자료

- 모눈종이 (1 cm 격자), 학생당 2 장;
- 연필, 지우개, 30 cm 자;
- 색연필또는사인펜 (프로젝트기본색인빨강 #CC2020 과검정권장);
- 인쇄된학습지 (부록 B);
- 칠판또는화이트보드.

7.3 Pixel Round 배포방법

편의순서대로:

1. **교사호스팅**: GitHub Pages 또는학교서버에게시. QR 코드로학생에게배포.
2. **로컬사본**: 프로젝트파일을각기기에복사한뒤 file://로 index.html 열기.
3. **PWA 오프라인모드**: 한번온라인으로접속하면브라우저에캐시되어이후인터넷없이사용가능.

8. 학습분량조정과다양성존중

모든활동은 **최소두가지접근경로**와 **두가지결과표현방식**을제공한다. 이를통해다양한학습수준과특성을가진학생들이자신에게맞는방식으로참여할수있다.

8.1 학습이느린학생

- 활동 1.2 의시간연장 (15 분부여);
- 원의중심이이미리표시된모눈종이제공;
- 최종프로젝트의변호 (활동 4.3) 는글쓰기, 구두발표, 음성녹음중선택.

8.2 심화학습희망학생

- 심화과제: $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ 를중점 $(1, R - \frac{1}{2})$ 에서평가하여브레젠함초기결정변수 $d_0 = 1 - R$ 을유도한다.
- 탐구과제: 이산넓이가 πr^2 로수렴하는속도를추정 (가우스격자점문제, 헉슬리 2003 년결과로 $O(r^{2/3})$).
- 프로그래밍: 유클리드알고리즘을 Python 으로 20 행이내에구현.

8.3 100 분블록수업변형

일부학교의 블록수업방식 (특히자공고, 자율형사립고) 에서는 50 분 $\times$ 4 차시를 100 분 $\times$ 2 차시로압축할수있다. 1+2 차시를 1 교시블록으로, 3+4 차시를 2 교시블록으로묶고중간에 10 분휴식을둔다.

8.4 원격·혼합수업

Pixel Round 의웹기반특성은원격수업에적합하다. Zoom, EBS 클래스, e 학습터 등의화면공유기능을통해교사시연이가능하며, 학생들은자기기기에서병행조작한다. 모눈종이작업물은사진으로찍어 NEIS, e 학습터, 클래스팅, 클래스 123 등으로제출한다.

9. 수업지도의실제

각차시는한국교실의표준수업흐름인 도입 $\rightarrow$ 전개 $\rightarrow$ 정리의 3 단계구조와, 그안에서 사고 $\rightarrow$ 짝활동 $\rightarrow$ 모둠활동 $\rightarrow$ 전체공유의흐름을따른다.

9.1 1 차시 — “컴퓨터는어떻게사각형으로원을그리는가?”

학습목표

이산래스터화를진짜수학문제로인식하기; 원의방정식복습; Pixel Round 첫만남.

1.1 — 도입: 문제제기 8 분

형태: 개별생각 → 짝이야기 → 전체공유.

전개:

1. 세개의고전픽셀아트이미지를띄운다: 슈퍼마리오의버섯, 1 세대포켓몬, 구글의레트로두들.
2. 발문: “이세그림에공통점은무엇인가? 컴퍼스로그린원과어떻게다른가?”
3. 학생개별로 1 분간생각적기, 짝과 2 분간이야기.
4. 전체공유. 교사는 “컴퓨터는정사각형셀만켜고끌수있는데, 어떤것을켜야하는지어떻게정하는가” 로초점화한다.

1.2 — 전개: 수작업으로원그리기 12 분

형태: 수작업과형식정의의대조.

준비물: 모눈종이, 연필.

전개:

1. 학생들은모눈종이의반쪽에 11×11 영역을설정하고중심셀에표시한다.
2. 지시: “지름 10 인가장좋은원을칠해보세요. 4 분, 지우개사용금지.”
3. 시간이다되면 3-4 명이칠판의큰모눈에자신의그림을재현한다.
4. 교사: “모두같은그림인가? 다른이유는? 누가옳은가?”
5. 정리: 정답은하나가아니다. 각자다른 **판정기준**을암묵적으로사용했다.

1.3 — 정리: 방정식과세가지알고리즘 15 분

형태: 판서중심강의.

원점을중심으로하는반지름 r 원의음함수방정식:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

내부의점은 $x^2 + y^2 < r^2$ 를만족한다. 장축·단축이 r_x, r_y 인타원으로의일반화:

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

픽셀격자에서문제는어떤 **셀** 이내부에속하는가이다. Pixel Round 는세가지방식의답을제공한다:

- **유클리드거리:** 셀의중심 $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ 이내부에있는가?
- **브레젠햄 (Bresenham):** 1965 년고전알고리즘, 정수연산만.

- **임계값 (Threshold):** 셀의 어느 모서리가 내부에 있는가?

실연: 교사가 Pixel Round 를 열어 지름 10 으로 설정. 세알고리즘을 차례로 30 초씩 보여준다. 강조: 세그림 모두 수학적으로 옳다, 단지 적용한 기준이 다를 뿐.

1.4 — 적용: 규칙을 엄격히 15 분

지시: “모눈종이로 돌아가, **엄격하게** 유클리드 기준으로 지름 10 원을 다시 그리세요. 셀의 중심 $(i + 0.5, j + 0.5)$ 이 원의 중심에서 거리 5 이하일 때만 칠한다.”

완성 후 Pixel Round 의 유클리드 모드 (지름 10) 출력과 비교한다. 둘은 정확히 일치해야 한다.

성찰카드 (2 분): “셀이 “원 안에 있다” 는 것은 한 문장으로 무엇을 의미하는가?”

과제 (선택)

활동 1.4 를 지름 8 과 14 로 반복한다. 두 그림을 다음 시간에 가져온다.

9.2 2 차시 — “세알고리즘, 세그림”

학습 목표

각 알고리즘을 독립된 수학적 정의로 분석하고, 정량적으로 비교하기.

2.1 — 도입: 복습 5 분

과제 회수. 학생들의 그림 차이를 빠르게 확인. 본차시 목표 안내: “오늘은 각 알고리즘을 현미경으로 들여다보며, 왜 브레젠햄이 컴퓨터 과학의 보석으로 불리는지 알아본다.”

2.2 — 유클리드알고리즘 10 분

셀 (i, j) 에 대해 정규화된 변위를 계산:

$$d_x = \frac{i + \frac{1}{2} - c_x}{r_x}, \quad d_y = \frac{j + \frac{1}{2} - c_y}{r_y}$$

$d_x^2 + d_y^2 \leq 1$ 일때만 셀을 칠한다.

칠판예제: $c_x = c_y = 5, r_x = r_y = 5$, 셀 $(2, 1)$. 결과 $d_x = -0.5, d_y = -0.7$, $d_x^2 + d_y^2 = 0.74 \leq 1$. 셀 내부.

개별활동: 셀 $(0, 0)$ 을 직접 확인. (답: $1.62 > 1$, **외부**.)

2.3 — 브레젠햄알고리즘 15 분

역사적배경: Jack Bresenham 이 1965 년 IBM 근무중에 발표. 당시 한번의 부동소수점 곱셈은 수백 마이크로초가 걸렸다. 그의 기여는 정수 덧셈과 비교만으로 원을 그리는 방법.

한국 맥락에서: 1965 년은 한국에서도 본격적인 산업화가 시작되던 시기이다. 컴퓨터 그래픽의 역사를 학생들이 추적해보는 것은 학생부의 독서활동과 탐구활동에 좋은 소재가 된다. 또한 2022 년 한국계 허준이 교수의 필즈상 수상은 한국 수학 위상의 새로운 정점을 보여주었다 — 수학을 “직업” 으로 진지하게 생각할 학생들에게 좋은 자극이 된다.

$(x = 0, y = R), d_0 = 1 - R$ 에서 출발. $0-45^\circ$ 8 분원에서 매 단계:

$$\begin{cases} d < 0 \text{ 이면 : 다음 픽셀 } (x+1, y), d += 2x + 3 \\ d \geq 0 \text{ 이면 : 다음 픽셀 } (x+1, y-1), d += 2(x - y) + 5 \end{cases}$$

칠판추적: $R = 5$ 에 대해 x, y, d 를 단계마다 표로 작성. 나머지 7 개의 8 분원은 D_4 대칭성에 의해 얻어진다.

지도 차별화: 결정 변수의 대수가 어렵다면 알고리즘을 규칙으로만 제시하고 유도하는 생략한다. 자세한 유도는 Pixel_Round_Math_ko-KR.pdf §5.

2.4 — 임계값알고리즘 10 분

각셀 (i, j) 에 대해 원의 중심에서 가장 가까운 모서리를 찾는다:

$$n_x = \text{clamp}(c_x, i, i+1), \quad n_y = \text{clamp}(c_y, j, j+1)$$

$$\left(\frac{n_x - c_x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y - c_y}{r_y}\right)^2 \leq 0.94 \text{ 이면 셀을 칠한다.}$$

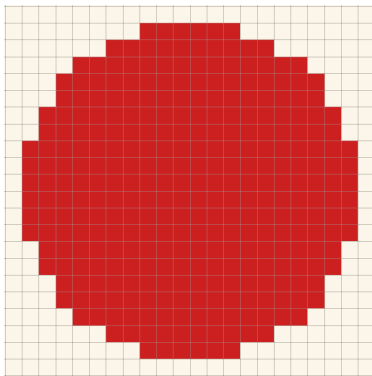
왜 1 이 아니라 0.94 인가? 경험적으로 1 일때 동·서·남·북의 네방향에서 1 픽셀짜리 “뽕족이” 가 생긴다. 약간 낮은 임계값이 이를 제거한다. 이것은 시각적 관찰에 따른 공학적 결정이다 — 순수 수학이 항상 마지막 답을 주지는 않음을 보여주는 좋은 예이다.

2.5 — 정량비교 10 분

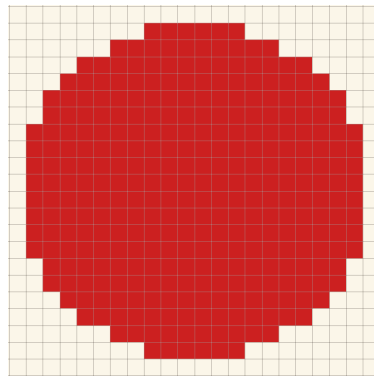
작활동: Pixel Round 에서:

1. 지름 16, 모드 *Filled* 로 설정.
2. 정보칩활성화. 세알고리즘의이산넓이를기록.
3. 연속넓이 $\pi r^2 = 64\pi \approx 201.06$ 계산.
4. 각알고리즘의상대오차계산: $\frac{|S_{\text{이산}} - S_{\text{연속}}|}{S_{\text{연속}}} \times 100\%$.
5. 오차가작은순으로정렬.

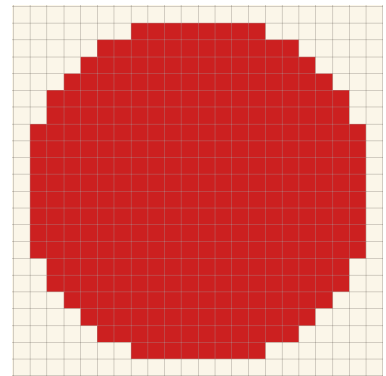
예상결과: 유클리드 < 1%, 임계값 5~8% 과대추정, 브레젠햄그중간. 전체공유.



(a) 유클리드



(b) Bresenham



(c) 임계값

Figure 1: 세알고리즘에서같은지름 20 원의비교. 지름이클수록차이는미묘하며, 작은지름에서더뚜렷하다.

9.3 3 차시 — “타원에서타원체로:3 차원으로의도약”

학습목표

타원방정식을 3 차원으로일반화; 복셀과이산부피도입; 평면절단을일차부등식으로이해.

3.1 — 2D 에서 3D 로 15 분

세 번째 좌표 z 를 추가하면 타원 방정식이 즉시 일반화된다:

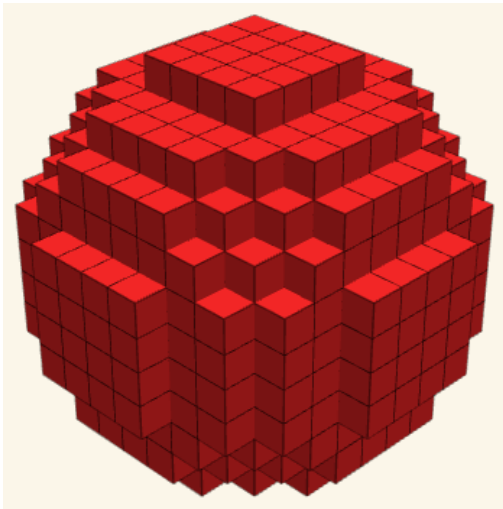
$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

$r_x = r_y = r_z = r$ 일때 **구** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

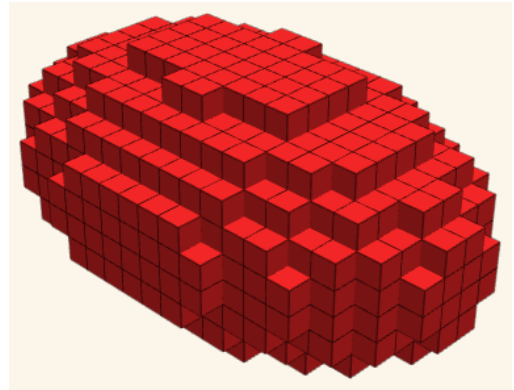
복셀: 3 차원 격자의 셀을 복셀 (voxel, volume element) 이라한다. 포함 조건은 2 차원과 동일한 구조이며 z 좌표가 추가된다:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \leq 1, \quad a_\xi = \frac{\xi + \frac{1}{2} - c_\xi}{r_\xi}$$

실연: Pixel Round 를 3D 모드로 전환. 구와 타원체를 번갈아 보여주고, 마우스로 회전, 세 가지 렌더링 스타일 (*Classic*, *Smooth*, *Blocks*) 을 비교.



(a) 구 $D = 12$ ($r_x = r_y = r_z = 6$).



(b) 타원체 $W = 20, H = 10, D = 12$.

Figure 2: 3D 복셀화. 각 정육면체가 하나의 복셀이며, 중심 좌표가 음함수 방정식으로 판정된다.

3.2 — 연속부피와이산부피 15 분

타원체의연속부피는미적분의고전적결과:

$$V = \frac{4}{3} \pi r_x r_y r_z$$

$r_x = r_y = r_z = r$ 일때 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. 이공식은수능 미적분영역의입체부피문제에서반복적으로등장한다.

작활동:

1. 지름 12 ($r = 6$) 구의연속부피를계산: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 216 \approx 904.78$.
2. Pixel Round 에서 $D = 12$ 구 (Filled 모드) 를생성. 이산부피를읽는다.
3. 상대오차를계산.

논의: $V_{\text{이산}}/V_{\text{연속}} \rightarrow 1$, $D \rightarrow \infty$ 일때. 작은 D 에서차이가크지만 — 이는이산화가 실제로셈을바꾼다는사실의정직한반영.

3.3 — 평면절단과일차부등식 10 분

Pixel Round 는 입체를 세 가지 평면으로 절단할 수 있다. 각 절단은 **일차부등식**으로 복셀 좌표에 적용된다:

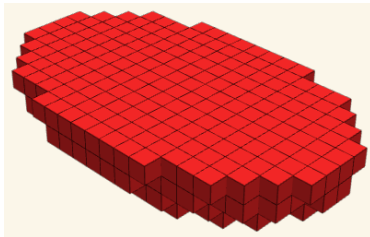
$$X \text{ 축: } x \geq \textit{cut} \Rightarrow \text{복셀 제거}$$

$$Y \text{ 축: } y \geq \textit{cut} \Rightarrow \text{복셀 제거}$$

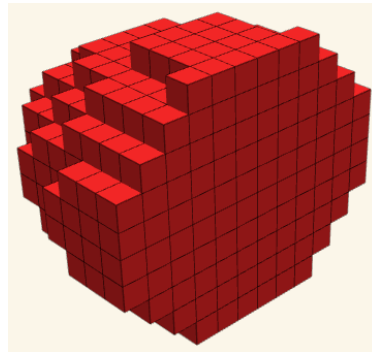
$$\text{대각: } x + y \geq \textit{cut} \Rightarrow \text{복셀 제거}$$

실연: 구를 Y 축에서 50% 절단, X 축에서 50% 절단, 대각선에서 50% 절단으로 차례로 시연.

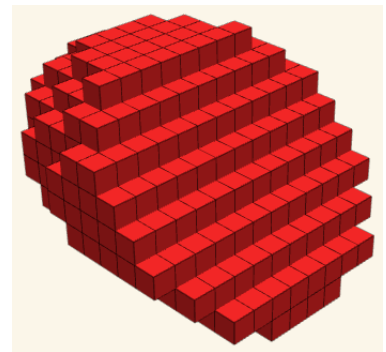
발문: “대각선 절단의 슬라이더는 왜 0 부터 $D_x + D_y$ 까지 움직이는가? D_x 가 아닌 이유는? 방정식의 어디에 답이 있는가?”



(a) Y 절단 50% ($y \geq 5$ 제거)



(b) X 절단 50% ($x \geq 10$ 제거)



(c) 대각절단 ($x + y \geq 15$ 제거)

Figure 3: 같은 타원체 ($W = 20, H = 10, D = 12$) 에 대한 세 가지 평면 절단, 각 부피의 50%를 유지. 대각절단의 계단 패턴에 주목.

3.4 — 한국문화와의접점 10 분

한글, 한옥, 케이팝시각디자인속의기하학.

세가지이미지또는자료를제시:

- **한글** (1443) 의기하학적디자인: 기본자음의 “ㅇ” 은완벽한원, “ㄱ” 은모서리, “ㅁ” 은정사각형. 세종대왕은한글을 음성기관의형상화와 철학적 기본도형으로설계했다.
- **한옥의처마곡선**: 기와로정의되는이산적형상이멀리서보면매끄러운곡선으로인지된다. 이는본단원의 “이산 → 연속” 과같은원리.
- **케이팝시각디자인**: BTS, BLACKPINK, NewJeans 등그룹로고의기하학적원형성. 단순기본도형의정교한결합.

논의: “한글은 600 년가까이된디지털인터페이스라할수있다 — 기본도형의 “픽셀” 로음성을표현한다. 케이팝의시각언어도같은원리에의지한다. *Pixel Round* 로우리가하는일은사실한국시각전통의연장선이다.”

이연결은학생부 세특에기록하기에좋은융합적사고의사례가된다.

9.4 4 차시 — “최종프로젝트: 창의적픽셀작품과수학적변호”

학습목표

단원전체내용을종합한창의적산출물제작; 수학적언어를 통한평가.

4.1 — 도입: 과제안내 5 분

과제: “2 3 명모둠으로 *Pixel Round* 로만든도형을최소 3 가지결합한픽셀또는복셀작품을만든다 (원, 타원, 구, 타원체중에서). 캐릭터, 아이콘, 동물, 로고등자유주제. 마지막에각모둠이작품을발표하고선택을 **수학적으로** 변호한다: 왜이알고리즘? 왜이비율? 왜이절단?”

모듬구성: 이질적으로사전편성.

4.2 — 전개: 창작 30 분**모둠별자료:**

- Pixel Round 가동작하는기기 1 대;
- 모눈종이, 연필, 사인펜 (밑그림용);
- 필수 3 문항이적힌안내지 (부록 B 문제 5).

단계:

1. 브레인스토밍과스케치.
2. Pixel Round 에서부분제작, PNG 내보내기.
3. 최종구성 (모눈종이에사인펜으로옮기거나 PPT 슬라이드로).
4. 안내지에수학적변호작성.

교사순회: “왜이알고리즘? 이절단을부등식으로어떻게쓸수있나?” 와같은유도발문.

4.3 — 정리: 발표와수업마무리 15 분

각모둠 2 분씩발표하며필수 3 문항중 최소 1 문항에답한다.

최소요건:

- 작품에포함된수학적도형을적어도하나식별;
- 선택한알고리즘을명시하고 (사후라도) 이유제시;
- 3D 절단이있으면부등식으로표현.

교사마무리 (3 분): 단원의핵심명제재확인 — “이산격자위에서는같은연속곡선이여러표현을허용한다. 그중하나를택하는것은그자체로수학적결정이다.” 평가자료제출일정안내.

학생부기록안내: 모둠활동의우수사례는학생부 교과학습발달상황 세부능력 및특기사항에기록가능. 특히 “수학적모델링능력”, “창의적사고와디지털도구활용” 등의키워드로정리할수있다.

10. 평가

평가는 **과정중심평가**와 **역량기반평가**를결합한다. 2022 개정교육과정의평가기조에부합한다.

10.1 진단평가

1 차시활동 1.2 에서실시. 좌표평면, 원의방정식, 넓이계산에어려움이있는학생을식별한다.

10.2 형성평가

4 차시에걸쳐분산: 관찰을통한참여도, 활동 1.4 ·2.2 ·2.5 ·3.2 의개인응답의질.

10.3 총괄평가

두가지산출물:

1. **학습지** (부록 B), 5 문항, 4 차시종료시제출.
2. **최종프로젝트** (활동 4.2) 와번호안내지.

10.4 평가루브릭

평가요소	매우우수 (A) / 우수 (B)	보통 (C) / 미흡 (D)
수학적지식	타원·타원체방정식을정확히활용; 세알고리즘을구분하고효과를예 측.	원방정식은다루지만타원으로의 일반화에서막힘; 알고리즘혼동.
도구활용능력	2D·3D Pixel Round 를자율조작; 내보내기알고리즘전환에능숙.	찾은도움필요; 2D 만다름.
수학적의사소통	정확한전문용어 (알고리즘, 복셀, 절단, 부등식) 로변호.	미학적설명에머무름; 전문용어 부족.
협력적소통	모둠내에서적극기여; 전체토론 에참여.	개별작업중심; 기여미미.

10.5 학기성적반영 (권장)

- 학습지:40%;
- 최종프로젝트와발표:50%;
- 수업참여관찰:10%.

11. 교과융합과진로연계

11.1 정보교과와의융합

브레젠헴알고리즘은알고리즘입문교과서의고전이다. 2 차시 2.3 을정보교사와협
력진행하면, Python 으로구현 (약 25 행) 을정보교과의과제로연결할수있다. 정
보교과의 수행평가자료로도활용가능.

11.2 미술교과와의융합

픽셀아트는디지털미술의핵심표현양식이다. Pixel Round 는그림이 동시에방정식
이며구도임을직접보여준다. 미술교사와협력하여학교복도나 SNS 에서작품전시
가능 — 학교동아리활동과도잘연결된다.

11.3 물리교과와의융합

Pixel Round 의효과음은순수사인파의가산합성으로생성된다. 선택된주파수들은 **12 평균율** 음에근접한다 (반음간격의주파수비는 $2^{1/12} \approx 1.0595$). 물리학 “파동” 단원과직접연결된다.

11.4 진로연계 — 미래융합인재

본단원에서다루는 알고리즘 + 시각표현 + 수학 + 디지털도구의결합은인공지능, 게임개발, 그래픽디자인, 데이터시각화등미래직업분야와직결된다. 허준이 (June Huh) 교수의 2022 년필즈상수상사례를통해 — “수학의길” 이자기자신에게도열려있을수있다는동기부여를제공할수있다. 이는 학생부진로활동에도좋은기록소재가된다.

12. 참고문헌

- 교육부. 초·중등학교교육과정총론 (교육부고시제 2022-33 호별책 1). 세종: 교육부, 2022.
- 교육부. 고등학교수학과교육과정 (교육부고시제 2022-33 호별책 8). 세종: 교육부, 2022.
- 한국교육과정평가원. 2022 개정교육과정에따른수학과평가기준자료. 진천: 한국교육과정평가원, 2023.
- 신현용·나카마보혜·신영주. 수학의발견 — 한국수학천재들의자취를찾아서. 서울: 궁리, 2018.
- 박세희. 수학자의시선으로본한글. 서울: 홍익출판사, 2019.
- Bresenham, J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 권 4, 호 1, 25–30 쪽, 1965.
- Lakatos, I. 증명과반박: 수학적발견의논리 (윤지나역). 서울: 민음사, 2001.
- Pólya, G. 어떻게문제를풀것인가 (이상호역). 서울: 천재교육, 2002.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. 학습격차 — 세계최고학생들에게서배우는교실의원리 (김상희역). 서울: 다른우리, 2003.

- 황선욱외. 고등학교기하 (지학사교과서, 2022 개정). 서울: 지학사, 2024.
- 김원경외. 고등학교미적분 II (좋은책신사고교과서, 2022 개정). 서울: 좋은책신사고, 2024.
- Pixel Round 기술문서:docs_math/Pixel_Round_Math_ko-KR.pdf.

A. Pixel Round 시연대본

1 차시활동 1.3 의시연흐름과교사자가연수용대본. 총 15 분.

A.1 시작과 2D 모드

1. Pixel Round 실행. 상단바, 캔버스영역, 컨트롤패널을지적.
2. 모드 **2D** / **원** 확인.
3. Size 슬라이더를 10 으로.
4. 정보칩활성화후낭독:“지름 10, 반지름 5, 넓이..., 알고리즘유클리드.”
5. 알고리즘전환:**유클리드** / **브레젠햄** / **임계값**. 각 30 초씩.

A.2 타원

1. 형태를 **타원** 으로전환. Width 와 Height 슬라이더출현.
2. $W = 16, H = 8$ 설정.
3. 발문: “이형태의방정식은 $(x/8)^2 + (y/4)^2 = 1$. 왜 x 를 8 로, y 를 4 로나누는가?”

A.3 3D 모드

1. **3D** / **구**, $D = 12$.
2. 마우스드래그로회전.
3. 정보칩활성화: 부피를기록.
4. **타원체** 로전환: $W = 20, H = 10, D = 10$.
5. Cut 슬라이더를 Y 축 50%.
6. 대각선축으로전환, 사선절단논의.

A.4 내보내기

1. 캔버스모서리의다운로드버튼.
2. PNG 저장.
3. 고해상도: 인쇄또는슬라이드첨부에적합.

B. 학습지

안내. 개별로풀기. Pixel Round 로검증가능, 단수학적설명은필수. 손글씨또는타이핑가능.

문제 1 — 원의방정식

원의중심 $(0,0)$, 반지름 $r = 7$. 각점이 내부, 외부, 위중어디에있는지판단하고이유를적어라.

- | | |
|-------------|----------------------|
| a) $(3,4)$ | 답: 내부 ($25 < 49$). |
| b) $(5,5)$ | 답: 외부 ($50 > 49$). |
| c) $(0,7)$ | 답: 위. |
| d) $(-7,0)$ | 답: 위. |

문제 2 — 유클리드기준

중심 $(5,5)$, 반지름 5 원에대해셀 $(1,3)$ 이칠해지는가?

답: 셀중심 $(1.5,3.5)$. 거리 $\sqrt{14.5} \approx 3.81 < 5$. **칠해진다.**

문제 3 — 이산넓이 vs. 연속넓이

Pixel Round 에서유클리드모드, 지름 20 원을생성. 이산넓이기록. πr^2 계산. 상대오차산출. 임계값알고리즘에대해서도반복. 비교.

답: $S_{\text{연속}} = 100\pi \approx 314.16$. 유클리드오차 $< 2\%$. 임계값 5–8% 초과.

문제 4 — 타원체부피와절단

타원체 $r_x = 4, r_y = 6, r_z = 3$.

- 연속부피계산.
- Y 축방향 50% 절단후남은부피.
- 절단을 y 좌표부등식으로표현.

답: (a) $V = 96\pi \approx 301.59$; (b) 대칭성으로 ≈ 150.80 ; (c) $y < cut, cut = 6$.

문제 5 — 최종프로젝트번호안내지

모듬작품완성후답하시오:

- (1) 사용한기하도형 (원, 타원, 구, 타원체) 과매개변수나열.
- (2) 메인도형에서어떤알고리즘을선택했는가? 그이유는? 다른두알고리즘이만들지못하는시각효과는?
- (3) 3D 절단이있는가? 있다면 한가지를부등식으로적으시오.

C. 디지털기기부족환경대안

기기보급이불충분한학교나, 기기사용을제한해야하는시간대에도, 본단원의핵심 학습을 종이만으로수행할수있다.

C.1 차시별대체

차시	원래활동	종이대체
1	Pixel Round 시연 (1.3)	교사가칠판에미리그려둔큰모눈에세가지알고리즘으로직접그리며보여줌.
2	소프트웨어비교 (2.5)	사전인쇄한 $D = 16$ 세가지알고리즘원을학생들에게나눠주고손으로셀을센다.
3	3D 구생성 (3.1, 3.2)	사전인쇄한구의단면시트 ($z = 0, 1, 2, \dots$) 를모눈종이에그려학생들에게배부, 머릿속에서쌍는다.
4	Pixel Round 창작 (4.2)	완전히모눈종이와색연필로창작. 번호 (4.3) 동일.

C.2 준비물 (일회성)

- A3 모눈종이 1 매 (30×30 격자), 칠판또는게시판에부착.
- 학생당 A4 모눈종이 4 매.
- 비교용세가지알고리즘원의참조시트 (교사가사전에 Pixel Round 로생성, PNG 출력, 학교복사실에서인쇄).

C.3 학교유형별조정

- **과학고·외고·자사고:** 2 차시브레젠험유도를학급전체에적용; 3 차시의가우스격자점문제를심화탐구과제로부여.
- **일반계고교:** 본지도안의기본경로적용; 수능 기하및 미적분주요출제단원과의연계를강조.
- **특성화고·마이스터고:** 부록의종이대체경로 + 최종프로젝트를진로분야 (산업디자인, IT, 시각미디어) 의실제상황으로변형.

D. 교사용용어집

- **알고리즘 (algorithm)** — 문제를 해결하기 위한 유한하고 명확한 명령의 순서. Pixel Round 의 세 알고리즘은 동일한 문제 (어느 셀을 칠할지) 에 대한 세 가지 다른 절차.
- **브레젠햄 알고리즘 (Bresenham)** — 1965 년 Jack Bresenham (IBM) 이 직선용으로 발표, 후에 Pitteway 와 Kappel 이 타원으로 확장. 정수 산술만 사용한다는 특성.
- **캔버스 (canvas)** — 브라우저에서 2D 또는 3D 그리기 공간을 제공하는 HTML 요소.
- **음함수 방정식** — $F(x, y) = 0$ 형태로 곡선을 함수의 영점 집합으로 정의하는 방정식. 타원은 $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 - 1 = 0$.
- **픽셀 (pixel)** — picture element 의 축약. 디지털 이미지의 최소 단위. 격자 상의 1×1 셀.
- **PWA (Progressive Web App)** — 기기에 설치할 수 있고 오프라인에서도 동작하는 웹 앱. Pixel Round 가 그 예.
- **래스터화 (rasterization)** — 연속적 기하 표현을 픽셀 (2D) 또는 볼셀 (3D) 행렬로 변환하는 과정.
- **장축·단축의 반 (semi-axis)** — 중심 C 의 타원에서, C 로부터 해당 축 방향 꼭짓점까지의 거리. 원은 $r_x = r_y$ 인 특수한 경우.
- **12 평균율** — 옥타브를 12 개의 같은 반음으로 분할. 반음 간 주파수 비는 $\sqrt[12]{2} \approx 1.0595$. 서양 및 현대 한국 음악의 기반.
- **볼셀 (voxel)** — volume element 의 축약. 3D 격자의 $1 \times 1 \times 1$ 정육면체 단위.
- **WebGL** — 브라우저의 3D 그래픽 API. Pixel Round 는 *three.js* 를 통해 사용.

— 수업지도안 끝 —