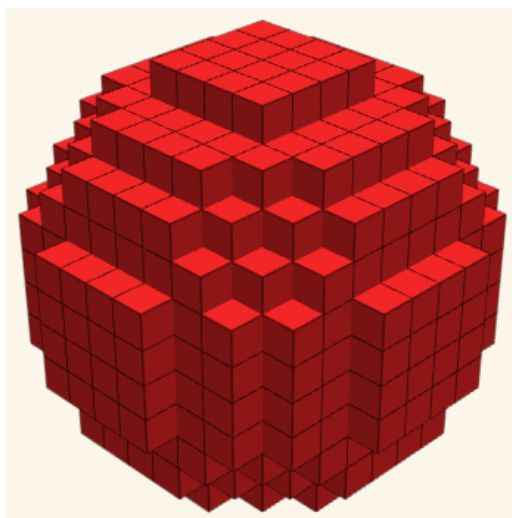


Pixel Round

Séquence pédagogique

Classe de Terminale — Spécialité Mathématiques

Séquence de quatre séances pour introduire le logiciel *Pixel Round* dans une classe de Terminale générale, spécialité Mathématiques. Article géométrie dans l'espace, pensée algorithmique et expression visuelle autour d'un seul problème : comment représenter une courbe continue sur une grille finie de pixels.



Sphère de diamètre 12 voxelisée par Pixel Round.

Disciplines articulées : Mathématiques · Numérique et Sciences
Informatiques (NSI) · Arts plastiques · Physique

Cadre : BO spécial n°8 du 25 juillet 2019 (programme Terminale spé
Maths) · Bac 2021

Sommaire

1	Identification et cadre	4
2	Justification didactique	4
3	Objectifs	6
3.1	Compréhension durable	6
3.2	Connaissances visées	6
3.3	Capacités procédurales	6
3.4	Attitudes	7
4	Compétences mathématiques et programme officiel	7
4.1	Connaissances du programme directement travaillées	8
5	Connaissances préalables	8
6	Ressources matérielles	8
6.1	Numérique	9
6.2	Papier	9
6.3	Déploiement du logiciel	9
7	Différenciation et accessibilité	9
7.1	Élèves à besoins particuliers (PAP, PPS)	10
7.2	Élèves en réussite forte	10
7.3	Variante TP de 1 h 30 (demi-groupes)	10
7.4	Hybride et distanciel	10
8	Séquence pédagogique	10
8.1	Séance 1 — « Comment un ordinateur dessine-t-il un cercle avec des carrés ? »	11
8.2	Séance 2 — « Trois algorithmes, trois dessins »	13
8.3	Séance 3 — « De l'ellipse à l'ellipsoïde : la troisième dimension » .	16
8.4	Séance 4 — « Projet final : pixel art original avec défense mathématique »	20
9	Évaluation	21
9.1	Évaluation diagnostique	21
9.2	Évaluation formative	21
9.3	Évaluation sommative	21
9.4	Grille d'évaluation par compétences	22
9.5	Pondération suggérée	22

10 Articulations interdisciplinaires	22
10.1 Avec NSI (Numérique et Sciences Informatiques)	22
10.2 Avec les Arts plastiques	22
10.3 Avec la Physique-Chimie	23
10.4 Avec l'Histoire des arts	23
10.5 Avec le Grand Oral	23
11 Bibliographie	23
A Script de démonstration en direct	25
A.1 Ouverture et mode 2D	25
A.2 Ellipse	25
A.3 Mode 3D	25
A.4 Export	26
B Fiche d'exercices	27
C Adaptation aux établissements sans dotation numérique	29
C.1 Substitutions par séance	29
C.2 Kit de préparation (à constituer une seule fois)	29
C.3 Articulation avec le LP ou la voie technologique	29
D Glossaire technique pour l'enseignant	30

1. Identification et cadre

Discipline	Mathématiques — spécialité (voie générale). Adaptable à la spécialité NSI, aux Mathématiques complémentaires et à l'enseignement scientifique.
Niveau	Terminale. Adaptable à la Première spé Maths et à la voie technologique (STI2D, STL).
Cadre institutionnel	Lycée public. Adaptations pour LP et hybride en Annexe C.
Durée	4 séances de 55 minutes (220 min). Variante en demi-groupes de TP de 1 h 30 décrite en §7.
Ressource centrale	Pixel Round : application web gratuite, sans compte, sans serveur, exécution hors-ligne (PWA). Conforme RGPD.
Programme officiel	Géométrie dans l'espace + Algorithmique et programmation (BO spécial n°8, 25/07/2019).
Disciplines articulées	NSI (algorithmique) ; Arts plastiques (image numérique) ; Physique-Chimie (acoustique, ondes).
Prérequis élèves	Équation cartésienne du cercle (Première) ; vecteurs et coordonnées dans l'espace (début Terminale) ; aires et volumes des solides usuels ; notion de fonction.
Préparation enseignant	15 min de manipulation du Pixel Round ; lecture du document docs_math/Pixel_Round_Math_fr-FR.pdf.

Réalité matérielle du lycée français

La séquence est conçue pour les réalités effectives des lycées publics : tableau numérique interactif (TNI) en salle, chariots de tablettes ou Chromebooks de prêt dans certains établissements, ENT (*Pronote*, *École Directe*, *Index Éducation*), filtrage académique des connexions. Pixel Round s'exécute sur n'importe quel navigateur, n'exige aucun compte et respecte intégralement le RGPD : aucune donnée n'est transmise à un serveur tiers. Un parcours *entièrement papier* sans ordinateur est détaillé en Annexe C.

2. Justification didactique

L'imagerie *pixel art* et *voxel art* occupe une place culturelle massive chez l'adolescent contemporain — de Minecraft à Hollow Knight, de Stardew Valley aux

pictogrammes des applications mobiles. Faire de ce répertoire visuel familier un *objet mathématique* convertit un goût quotidien en problème authentique : comment l'ordinateur, qui ne dispose que de cellules carrées, représente-t-il une courbe analytiquement définie sur $\mathbb{R}$?

La séquence s'inscrit dans une **démarche scientifique** explicite, au sens du programme officiel : observation d'un phénomène, formulation d'une conjecture, expérimentation pour la mettre à l'épreuve, formalisation, généralisation. Elle adopte la grille des six **compétences mathématiques** fixées par le BO (*chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer*) en répartissant explicitement le travail de la séance sur chacune d'elles.

Trois engagements théoriques structurent l'ensemble :

- **Théorie des situations didactiques** (Brousseau, 1998). Chaque séance commence par une *situation-problème* où la connaissance visée n'est pas donnée mais devient l'outil nécessaire à la résolution. Le *milieu* matériel est ici doublement constitué : papier quadrillé et Pixel Round.
- **Pensée algorithmique au lycée**, en cohérence avec le programme officiel qui place *algorithmique et programmation* comme transversale. Les trois algorithmes du Pixel Round (euclidien, Bresenham, seuil) deviennent des objets d'étude en soi.
- **Validation par la mise à l'épreuve**. Le logiciel n'est pas un substitut au calcul : il fournit un dispositif de *vérification empirique* d'une conjecture théoriquement formulée. C'est l'esprit du raisonnement qui parcourt toute la mathématique scolaire française depuis Polya et Bachelard.

Pourquoi pas un simple cours sur l'équation du cercle ?

Le programme de Première traite l'équation cartésienne du cercle en quelques séances. La séquence Pixel Round n'est ni un rappel ni un approfondissement direct : elle prend l'équation déjà acquise comme *moyen* pour résoudre un problème nouveau, dont la formulation rend visible un débat épistémologique — à savoir, que la définition du *discret* à partir du *continu* n'admet pas une seule réponse. C'est précisément ce que Lakatos a appelé *preuves et réfutations*, transposé au tableau de Terminale.

3. Objectifs

3.1 Compréhension durable

À l'issue des quatre séances, les élèves comprendront que **représenter un objet mathématique continu sur une grille discrète constitue en soi une décision mathématique**, dont plusieurs réponses sont défendables, chacune formalisable comme critère précis d'appartenance des cellules.

3.2 Connaissances visées

- Maîtriser l'équation cartésienne de l'ellipse $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 = 1$ et reconnaître le cercle comme cas particulier ($r_x = r_y$).
- Énoncer trois critères distincts d'appartenance d'une cellule (euclidien, point milieu de Bresenham, couverture de coin) et anticiper qualitativement leurs différences.
- Généraliser l'équation 2D à l'équation de l'ellipsoïde dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
- Interpréter une coupe planaire d'un solide comme une *inéquation linéaire* appliquée aux coordonnées des voxels.

3.3 Capacités procédurales

- Naviguer dans Pixel Round en mode 2D comme en 3D ; exporter des images au format PNG.
- Dessiner à la main, sur papier quadrillé, l'approximation discrète d'un cercle suivant une règle énoncée, et la confronter au logiciel.

- Calculer l'aire discrète d'une ellipse par comptage de cellules et la comparer à l'aire continue $\pi r_x r_y$, en exprimant l'écart en pourcentage d'erreur.
- Composer une figure originale combinant cercles, ellipses, sphères et ellipsoïdes, et défendre les choix dans un registre mathématique.

3.4 Attitudes

- Coopérer en binôme ou trinôme dans les activités pratiques.
- Argumenter mathématiquement en défense d'un choix esthétique — ce qui constitue un excellent entraînement au *Grand Oral*.
- Accepter qu'un même problème réel puisse admettre plusieurs réponses techniquement correctes.

4. Compétences mathématiques et programme officiel

La séquence mobilise simultanément les **six compétences** fixées par le programme :

Chercher

Engager une recherche — analyser et interpréter une figure, explorer une situation. *Concrètement* : la situation initiale (Activité 1.2) où les élèves dessinent à la main un cercle de diamètre 10 sans règle unique.

Modéliser

Reconnaître des situations relevant des mathématiques ; traduire un problème en langage mathématique. *Concrètement* : la traduction du dessin de cellules en équation $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 \leq 1$.

Représenter

Choisir un cadre (analytique, géométrique, algorithmique) adapté ; passer d'un registre à un autre. *Concrètement* : basculer entre l'équation, le dessin, le code de l'algorithme.

Raisonner

Démontrer ; effectuer des déductions ; valider ou réfuter. *Concrètement* : la dérivation du paramètre de décision $d_0 = 1 - R$ chez Bresenham (Activité 2.3, niveau approfondi).

Calculer

Effectuer un calcul automatisable ; calculer le résultat. *Concrètement* : le calcul de l'erreur relative entre aire discrète et πr^2 (Activité 2.5) et du volume de l'ellipsoïde $\frac{4}{3}\pi r_x r_y r_z$ (Activité 3.2).

Communiquer

Faire preuve de précision dans l'usage de la langue ; recevoir et émettre une argumentation. *Concrètement* : la défense orale du projet final (Activité 4.3), entraînement direct au Grand Oral.

4.1 Connaissances du programme directement travaillées

- **Géométrie dans l'espace** : vecteurs et coordonnées dans $\mathbb{R}^3$; équations cartésiennes et paramétriques de plans ; représentations planes de solides.
- **Algorithmique et programmation** : algorithmes itératifs ; structures conditionnelles ; complexité naïve (ordre de grandeur).
- **Numérique** : approximation, erreur relative ; convergence d'une suite ; représentation d'un réel par un entier.

5. Connaissances préalables

La séquence présuppose l'acquisition des notions suivantes :

- Plan cartésien : repérage de points (x, y) et (x, y, z) .
- Équation cartésienne du cercle (contenu de Première).
- Aires des polygones et du disque ; volumes du cube, du prisme, du cylindre (acquis Seconde–Première).
- Notion de fonction : ensemble de définition, image, courbe représentative.
- Pourcentage et proportionnalité.

Un *diagnostic* de 10 minutes en début de Séance 1 (cf. §8.1) permet d'identifier des lacunes éventuelles, fréquentes après la période post-COVID.

6. Ressources matérielles

6.1 Numérique

- Pixel Round (un poste par élève ou par binôme) ;
- Vidéoprojecteur ou TNI ;
- Salle informatique *ou* chariot de tablettes/Chromebooks *ou* BYOD via smartphones.

6.2 Papier

- Papier quadrillé Seyès 5 mm, 2 feuilles par élève ;
- Crayon noir HB, gomme, règle 30 cm ;
- Crayons de couleur ou feutres fins (palette du projet : rouge #CC2020 sur fond crème #FBF6E9) ;
- Fiche d'exercices imprimée (Annexe B) ;
- Tableau blanc, tableau noir ou TNI.

6.3 Déploiement du logiciel

Trois options par ordre de simplicité :

1. **Hébergement** sur GitHub Pages ou Netlify (gratuit). URL distribuée par QR code projeté.
2. **Copie locale** des fichiers du projet sur chaque poste (ouverture de `index.html` via `file://`).
3. **Mode PWA hors-ligne** : ouverture initiale en ligne, le navigateur installe l'application pour les usages ultérieurs.

7. Différenciation et accessibilité

Chaque activité offre au moins **deux entrées** et **deux modes de restitution**, ce qui permet d'accompagner la diversité des élèves dans la classe.

7.1 Élèves à besoins particuliers (PAP, PPS)

- Temps majoré pour l'Activité 1.2 (15 min au lieu de 10) ;
- Feuilles quadrillées pré-marquées avec le centre du cercle ;
- Choix entre défense écrite et défense orale enregistrée pour le projet final ;
- Polices et tailles agrandies sur les supports imprimés (corps 14 minimum).

7.2 Élèves en réussite forte

- Approfondissement : démontrer le paramètre initial $d_0 = 1 - R$ de Bresenham en évaluant $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ au point milieu $(1, R - \frac{1}{2})$.
- Conjecture : estimer la vitesse de convergence de l'aire discrète vers πr^2 quand $r \rightarrow \infty$. Réponse : $O(r^{2/3})$ (résultat profond de théorie analytique des nombres).
- Implémentation libre : programmer l'algorithme euclidien en 20 lignes de Python.

7.3 Variante TP de 1 h 30 (demi-groupes)

Lorsque le lycée organise un dédoublement TP, la séquence se condense : Séances 1+2 dans un premier TP, 3+4 dans un second, avec respiration obligatoire à mi-parcours.

7.4 Hybride et distanciel

La nature *web* du Pixel Round permet de mener la séquence intacte en visioconférence (Ma Classe à la Maison, BBB de l'académie). Les travaux papier sont photographiés et déposés sur l'ENT (Pronote, École Directe).

8. Séquence pédagogique

La progression suit une structure **en quatre temps** caractéristique de la tradition didactique française : *situation d'amorce* $\rightarrow$ *problématisation* $\rightarrow$ *institutionnalisation* $\rightarrow$ *remobilisation*. À chaque séance correspond une remontée du concret vers l'abstrait, suivie d'une redescende vers le concret par l'application.

8.1 Séance 1 — « Comment un ordinateur dessine-t-il un cercle avec des carrés ? »

Objectif de séance

Poser le problème central de la rasterisation discrète comme problème mathématique authentique ; mobiliser l'équation du cercle ; présenter Pixel Round.

1.1 — Situation d'amorce 10 min

Modalité : *réfléchir-échanger-mettre en commun.*

Déroulé :

1. Projeter trois sprites classiques du *pixel art* : le champignon de Super Mario, un Pokémon de première génération et le logo Google en version rétro.
2. Consigne : « *Observez attentivement. Qu'ont ces trois images en commun ? Qu'est-ce qui les distingue d'un cercle tracé au compas ?* »
3. Chaque élève écrit individuellement sa réponse (1 min), puis échange avec son voisin (2 min).
4. Mise en commun guidée : noter les réponses-clés au tableau. Conduire vers l'observation : « *l'ordinateur ne sait qu'allumer des cases carrées — comment décide-t-il lesquelles ?* »

1.2 — Problématisation 15 min

Modalité : dessin manuel confronté à la définition formelle.

Matériel : papier quadrillé, crayon.

Déroulé :

1. Chaque élève reçoit une demi-feuille quadrillée et délimite une région 11×11 cellules en marquant le centre.
2. Consigne : « *Coloriez le meilleur cercle possible de diamètre 10. Quatre minutes. Pas de gomme.* »
3. Au temps, trois ou quatre volontaires reproduisent leur dessin au tableau sur une grille tracée à la craie.
4. Observation dirigée : « *Avez-vous fait le même dessin ? Pourquoi non ? Qui a raison ?* »
5. Institutionnalisation : aucune solution unique. Chaque élève a implicitement adopté un **critère** différent.

1.3 — Institutionnalisation 15 min

Modalité : cours dialogué au tableau.

Contenu :

L'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon r :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Les points du *disque ouvert* vérifient $x^2 + y^2 < r^2$. Généralisation à l'ellipse de demi-axes r_x, r_y :

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1$$

Sur une grille de pixels, le problème est de décider quelles **cellules** appartiennent à l'intérieur. Plusieurs réponses sont possibles. Pixel Round implémente *trois* critères :

- **Euclidien** : le centre $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ est-il à l'intérieur ?
- **Bresenham** : algorithme historique de 1965, en arithmétique entière.
- **Seuil** : un *coin* de la cellule est-il à l'intérieur ?

Démonstration en direct. L'enseignant ouvre Pixel Round, fixe le diamètre à 10, alterne entre les trois algorithmes en commentant. Souligner : les trois figures sont *mathématiquement correctes*, chacune sous son propre critère.

1.4 — Remobilisation immédiate 10 min

Consigne : « Reprenez votre feuille. Redessinez le cercle de diamètre 10 en appliquant **rigoureusement** le critère euclidien : on colorie la cellule si et seulement si son centre $(i + 0,5, j + 0,5)$ est à une distance ≤ 5 du centre du cercle. »

À la fin, comparer avec la sortie de Pixel Round en mode euclidien, diamètre 10. Les dessins doivent coïncider.

Ticket de sortie (2 min) : « En une phrase, qu'est-ce que cela signifie pour une cellule d'être "à l'intérieur" du cercle ? »

Travail à la maison (facultatif)

Reprendre l'Activité 1.4 avec les diamètres 8 et 14. Apporter les deux dessins en Séance 2.

8.2 Séance 2 — « Trois algorithmes, trois dessins »**Objectif de séance**

Approfondir l'analyse de chacun des trois algorithmes comme définition mathématique propre et les comparer quantitativement.

2.1 — Reprise 5 min

Collecter rapidement les dessins du travail à la maison, observer les variations, annoncer le fil de la séance : « Aujourd'hui nous regardons chaque algorithme à la loupe et nous découvrons pourquoi Bresenham est considéré comme un bijou de l'informatique. »

2.2 — Algorithme euclidien 10 min

Reformulation. Pour une cellule (i, j) , calculer

$$d_x = \frac{i + \frac{1}{2} - c_x}{r_x}, \quad d_y = \frac{j + \frac{1}{2} - c_y}{r_y}$$

La cellule est coloriée si et seulement si $d_x^2 + d_y^2 \leq 1$.

Au tableau. Résoudre explicitement le cas $c_x = c_y = 5$, $r_x = r_y = 5$, cellule $(2, 1)$. On obtient $d_x = -0,5$, $d_y = -0,7$, donc $d_x^2 + d_y^2 = 0,74 \leq 1$. Cellule *intérieure*.

Travail individuel. Chaque élève teste la cellule $(0, 0)$. (Réponse : $1,62 > 1$, donc **extérieure**.)

2.3 — Algorithme de Bresenham 15 min

Repère historique. Jack Bresenham publie l'algorithme en 1965 chez IBM. À cette époque, une seule multiplication en virgule flottante peut coûter des centaines de microsecondes. Son apport : dessiner en utilisant *exclusivement* additions et comparaisons entières.

Partant de $(x = 0, y = R)$ avec $d_0 = 1 - R$, à chaque pas dans l'octant $0-45^\circ$:

$$\begin{cases} \text{si } d < 0 : & \text{suivant : } (x+1, y), d += 2x + 3 \\ \text{si } d \geq 0 : & \text{suivant : } (x+1, y-1), d += 2(x - y) + 5 \end{cases}$$

Trace au tableau. Dérouler l'algorithme pour $R = 5$, en tabulant x, y, d . Les sept autres octants s'obtiennent par symétrie (D_4).

Note de différenciation. Si la classe peine sur l'algèbre du paramètre d , présenter l'algorithme comme *règle* sans démonstration formelle. Le détail complet est dans Pixel_Round_Math_fr-FR.pdf, §5.

Articulation NSI : l'algorithme peut être implémenté en 25 lignes de Python en classe de NSI ; coordonner la séance avec le collègue de NSI si possible.

2.4 — Algorithme de seuil 10 min

Pour chaque cellule (i, j) , identifier le *coin le plus proche* du centre :

$$n_x = \text{clamp}(c_x, i, i+1), \quad n_y = \text{clamp}(c_y, j, j+1)$$

La cellule est coloriée si $\left(\frac{n_x - c_x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y - c_y}{r_y}\right)^2 \leq 0,94$.

Pourquoi 0,94 et pas 1 ? Empiriquement, avec 1 apparaissent des « pics » d'un pixel aux quatre points cardinaux. Le seuil légèrement inférieur les supprime. *C'est une décision d'ingénierie issue d'une inspection visuelle* — exemple précieux de ce que la mathématique pure ne tranche pas toujours.

2.5 — Comparaison quantitative 10 min

Travail en binôme. Sur Pixel Round :

1. Régler le diamètre sur 16, mode *Plein*.
2. Activer le badge d'information. Relever l'aire discrète pour chacun des trois algorithmes.
3. Calculer l'aire continue $\pi r^2 = 64\pi \approx 201,06$.
4. Pour chaque algorithme, calculer l'erreur relative : $\frac{|A_{\text{disc}} - A_{\text{cont}}|}{A_{\text{cont}}} \times 100\%$.
5. Ordonner les trois algorithmes du plus proche au plus éloigné de la valeur continue.

Résultat attendu : euclidien autour de 1% ; seuil sur-estime de quelques pour cent ; Bresenham se place entre les deux. Confirmation collective au tableau.

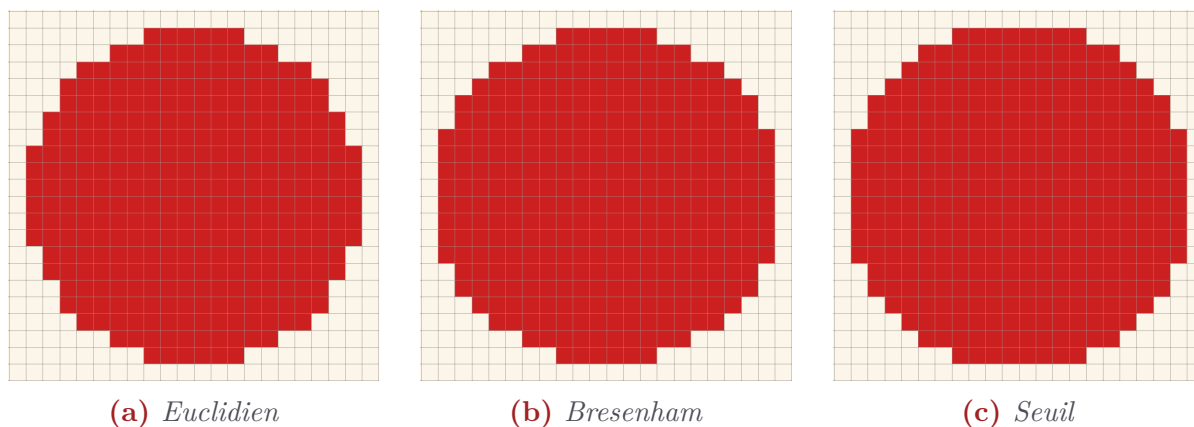


Fig. 1 : Même cercle de diamètre 20 dans les trois algorithmes. Aux grands diamètres, les différences sont plus subtiles qu'aux petits diamètres.

8.3 Séance 3 — « De l'ellipse à l'ellipsoïde : la troisième dimension »

Objectif de séance

Généraliser l'équation à la dimension 3 ; introduire les voxels et le volume discret ; comprendre les coupes planaires comme inéquations linéaires.

3.1 — Du 2D au 3D 15 min

Ajouter une troisième coordonnée z . L'équation de l'ellipse se généralise immédiatement :

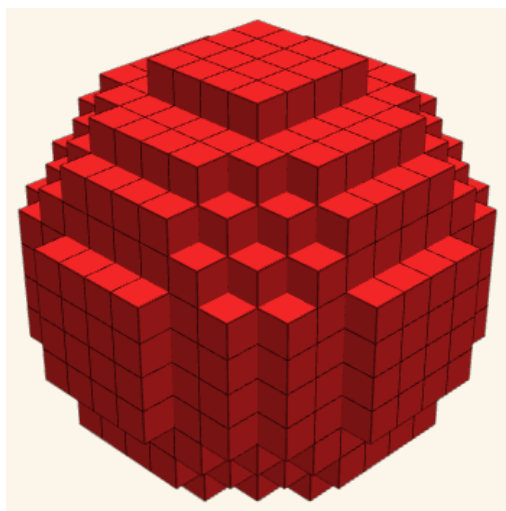
$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

Lorsque $r_x = r_y = r_z = r$, on retrouve la **sphère** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

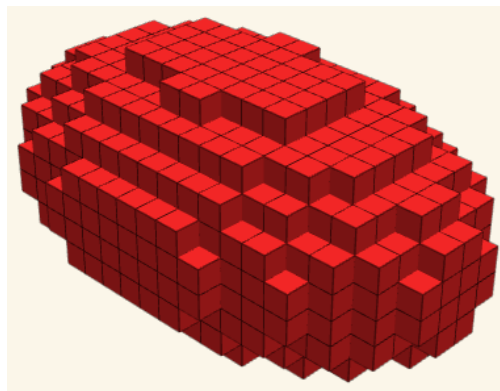
Voxels : la cellule d'une grille 3D s'appelle *voxel* (*volume element*). Le critère d'appartenance est identique au 2D, avec la troisième coordonnée :

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \leq 1, \quad a_\xi = \frac{\xi + \frac{1}{2} - c_\xi}{r_\xi}$$

Démonstration. Basculer Pixel Round en 3D, alterner Sphère/Ellipsoïde, faire tourner à la souris, observer la structure de voxels et les trois styles d'ombrage (Classic, Smooth, Blocks).



(a) Sphère $D = 12$
($r_x = r_y = r_z = 6$).



(b) Ellipsoïde
 $W = 20, H = 10, D = 12$.

Fig. 2 : Voxelisation 3D. Chaque cube est un voxel dont la coordonnée du centre est testée contre l'équation implicite.

3.2 — Volume continu vs. discret 15 min

Le volume continu de l'ellipsoïde est un résultat classique du calcul intégral :

$$V = \frac{4}{3} \pi r_x r_y r_z$$

Lorsque $r_x = r_y = r_z = r$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Formule récurrente dans les sujets du Bac (épreuve écrite et Grand Oral).

Travail en binôme :

1. Calculer le volume continu d'une sphère de diamètre 12 ($r = 6$) : $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 216 \approx 904,78$.
2. Dans Pixel Round, générer la sphère $D = 12$, mode *Plein*. Relever le volume discret.
3. Calculer l'erreur relative.

Discussion : le rapport $V_{\text{disc}}/V_{\text{cont}} \rightarrow 1$ lorsque $D \rightarrow \infty$. Pour D petit, la divergence est sensible, ce qui est *mathématiquement correct* : la discrétisation modifie le décompte.

3.3 — Coupes comme inéquations linéaires 10 min

Pixel Round permet de couper le solide par **trois plans**. Chaque coupe est une *inéquation linéaire* appliquée au centre du voxel :

Plan X : $x \geq cut \Rightarrow$ voxel éliminé

Plan Y : $y \geq cut \Rightarrow$ voxel éliminé

Plan diagonal : $x + y \geq cut \Rightarrow$ voxel éliminé

Démonstration. Couper une sphère en Y à 50% ; puis en X à 50% ; puis basculer sur l'axe diagonal à 50%.

Discussion : « Pourquoi le curseur de la coupe diagonale va-t-il de 0 à $D_x + D_y$ et non à D_x ? Où, dans l'équation, se trouve la réponse ? »

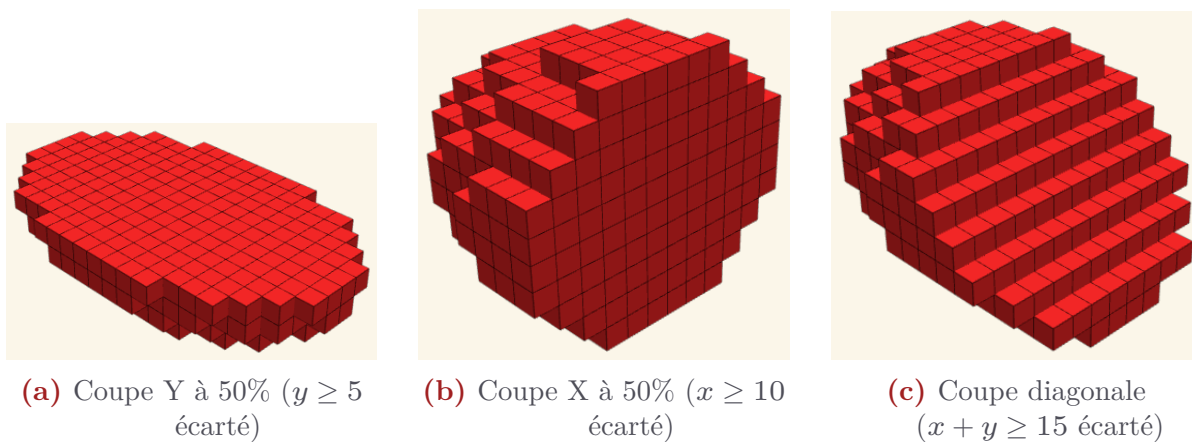


Fig. 3 : Trois coupes planes sur le même ellipsoïde ($W = 20, H = 10, D = 12$), chacune préservant 50% du volume. Notez le motif en escalier de la coupe diagonale.

3.4 — Connexion patrimoniale et culturelle 10 min

Articulation avec l'enseignement d'histoire des arts.

Projeter trois images :

- Une mosaïque romaine de la villa du Casale ou de Provence (par exemple les rondelles de Vienne) : cercles tessellés en pierres carrées.
- Une rosace gothique de Notre-Dame de Paris ou de Chartres : symétrie radiale et subdivision géométrique.
- Une vue intérieure de la Sagrada Familia (Gaudí) ou de la Cité Radieuse (Le Corbusier) : sphères, paraboloides et formes quadratiques en architecture.

Discussion : « Les Romains ont tesselé des cercles avec des pierres carrées il y a deux mille ans. Quel algorithme aurait-on dit qu'ils utilisaient ? Le problème change-t-il quand la pierre fait 3 centimètres au lieu d'1 pixel ? »

Cette articulation est aussi une excellente piste de sujet pour le **Grand Oral** en spécialité Mathématiques : la rasterisation discrète comme problème transhistorique.

8.4 Séance 4 — « Projet final : pixel art original avec défense mathématique »

Objectif de séance

Mobiliser l'ensemble du contenu dans une production originale ; évaluer par la défense argumentée des choix mathématiques.

4.1 — Présentation du défi 5 min

Consigne : « *En binôme ou trinôme, vous allez produire une image de pixel art ou voxel art qui combine au moins trois figures générées par Pixel Round (cercles, ellipses, sphères ou ellipsoïdes). Personnage, icône, animal, logo — vous choisissez. À la fin, chaque groupe présentera l'œuvre en justifiant **mathématiquement** les choix : pourquoi cet algorithme ? pourquoi cette proportion ? pourquoi cette coupe ?* »

Formation des groupes : hétérogènes, pré-assignés. 1 minute pour s'installer.

4.2 — Production 30 min

Matériel par groupe :

- Un poste avec Pixel Round ;
- Papier quadrillé, crayons, feutres pour ébauche ;
- Fiche-guide avec trois questions obligatoires (Annexe B, exercice 5).

Phases internes :

1. brainstorming et ébauche papier.
2. production dans Pixel Round et exports PNG des composantes.
3. montage final (sur papier quadrillé avec feutres, ou en présentation numérique).
4. rédaction de la justification mathématique sur la fiche-guide.

Accompagnement enseignant : circuler entre les groupes ; questions médiatrices — « *pourquoi cet algorithme ? comment décririez-vous cette coupe par une inéquation ?* »

4.3 — Présentation et synthèse 15 min

Chaque groupe dispose de 2 minutes pour présenter et répondre à *au moins une* des trois questions mathématiques obligatoires.

Critères minimaux :

- identifier au moins une figure mathématique dans l'œuvre ;
- nommer l'algorithme choisi et justifier (même *a posteriori*) son adéquation ;
- s'il y a coupe 3D, la décrire comme inéquation.

Synthèse finale enseignant (3 min) : reprendre l'idée centrale — « *sur une grille discrète, une même courbe continue admet plusieurs représentations ; en choisir une est prendre une décision mathématique.* » Annoncer l'évaluation sommative.

Lien Grand Oral : cette défense est un exercice direct de communication scientifique adapté à l'épreuve du Grand Oral. Encourager les élèves à mémoriser leur défense de 1 minute pour s'en servir comme *rampe de lancement* d'un sujet du Grand Oral.

9. Évaluation

L'évaluation est **formative** pendant la séquence et **sommative** en clôture, conformément aux orientations du Bac 2021 (contrôle continu, épreuves terminales).

9.1 Évaluation diagnostique

Séance 1, Activité 1.2. L'enseignant repère les lacunes éventuelles sur le plan cartésien, l'équation du cercle, le calcul d'aire.

9.2 Évaluation formative

Distribuée sur les quatre séances : observation directe, qualité des productions individuelles dans les activités 1.4, 2.2, 2.5, 3.2.

9.3 Évaluation sommative

Deux livrables :

1. **Fiche d'exercices** (Annexe B), 5 questions, à rendre en fin de Séance 4.
2. **Projet final** (Activité 4.2), avec fiche-guide remplie.

9.4 Grille d'évaluation par compétences

Compétence	Maîtrise satisfaisante / très bonne (12–20)	Insuffisante / Fragile (0–11)
Modéliser	Applique correctement l'équation de l'ellipse/ellipsoïde; reconnaît les trois algorithmes et leurs effets.	Utilise l'équation du cercle mais bute sur la généralisation à l'ellipse / confond les algorithmes.
Calculer	Calcule sans erreur l'aire, le volume et l'erreur relative; vérifie au logiciel.	Erreurs de calcul, vérification absente.
Communiquer	Défend ses choix avec un vocabulaire mathématique précis; expression orale claire et argumentée.	Justification esthétique seule, vocabulaire imprécis.
Coopérer	Contribue activement au binôme; participe au débat collectif.	Travail individuel; faible contribution.

9.5 Pondération suggérée

- Fiche d'exercices : 40%.
- Projet final et défense orale : 50%.
- Implication processuelle : 10%.

10. Articulations interdisciplinaires

10.1 Avec NSI (Numérique et Sciences Informatiques)

L'algorithme de Bresenham est un classique de l'informatique. La Séance 2.3 peut être co-pilotée avec le professeur de NSI, qui prolongera l'analyse par une implémentation en Python — objet d'évaluation possible de la partie projet de l'épreuve de NSI.

10.2 Avec les Arts plastiques

La production de *pixel art* est traditionnellement abordée comme un langage artistique. Pixel Round offre l'occasion de croiser Mathématiques et Arts plastiques sur le même objet : la figure *est* à la fois équation et composition. Suggestion : exposition conjointe des productions sur les murs du CDI ou sur le site du lycée.

10.3 Avec la Physique-Chimie

La couche sonore du Pixel Round utilise la synthèse additive d'ondes sinusoïdales pures. Les fréquences choisies approchent les notes du **tempérament égal de 12 demi-tons** (chaque demi-ton multiplie la fréquence par $2^{1/12} \approx 1,0595$). Articulation directe avec les chapitres *Ondes mécaniques* et *Lumière et matière* de la spé Physique-Chimie.

10.4 Avec l'Histoire des arts

Le problème de la rasterisation d'un cercle n'a pas attendu l'ordinateur : il est déjà présent dans les mosaïques romaines, les vitraux gothiques, les œuvres de Vasarely, le Modulor de Le Corbusier. Une coplanification avec le professeur d'Histoire est possible pour les élèves suivant l'option Histoire des arts.

10.5 Avec le Grand Oral

La défense du projet final (Activité 4.3) constitue un excellent prototype de réponse au Grand Oral. Les sujets potentiels : « *Existe-t-il un cercle parfait sur une grille de pixels ?* », « *De Bresenham aux GPU : pourquoi l'arithmétique entière reste-t-elle stratégique en informatique ?* »

11. Bibliographie

- BACHELARD, G. *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin, 1938.
- BRESENHAM, J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, vol. 4, n° 1, p. 25–30, 1965.
- BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage, 1998.
- FRANCE. *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019*. Programme de spécialité Mathématiques de la classe Terminale générale.
- HOUEMENT, C. ; KUZNIAK, A. Paradigmes géométriques et espaces de travail mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 11, p. 175–193, 2006.
- LAKATOS, I. *Preuves et réfutations : Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann, 1984.

- PITTEWAY, M. L. V. Algorithm for drawing ellipses or hyperbolae with a digital plotter. *The Computer Journal*, vol. 10, n° 3, p. 282–289, 1967.
- POLYA, G. *Comment poser et résoudre un problème*. Paris : Jacques Gabay, 1989 [orig. 1945].
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, p. 133–170, 1990.
- Pixel Round — document technique : docs_math/Pixel_Round_Math_fr-FR.pdf.

A. Script de démonstration en direct

Séquence recommandée pour la démonstration initiale (Activité 1.3) et pour la familiarisation de l'enseignant. Durée : 15 minutes.

A.1 Ouverture et mode 2D

1. Ouvrir Pixel Round. Repérer la barre supérieure, le canevas central, les contrôles latéraux.
2. Confirmer le mode **2D / Cercle**.
3. Régler le curseur *Size* sur 10. Observer la figure.
4. Activer le badge d'information dans le coin du canevas. Lecture à voix haute : « Diamètre 10, Rayon 5, Aire ..., Algorithme Euclidien. »
5. Basculer entre les trois algorithmes : **Euclidien / Bresenham / Seuil**. 30 secondes sur chacun.

A.2 Ellipse

1. Passer à **Ellipse**. Les curseurs *Largeur* et *Hauteur* apparaissent.
2. Régler $W = 16$, $H = 8$.
3. Question : « L'équation qui régit cette forme est $(x/8)^2 + (y/4)^2 = 1$. Pourquoi divise-t-on x par 8 et y par 4 ? »

A.3 Mode 3D

1. Passer à **3D / Sphère**, $D = 12$.
2. Faire glisser à la souris pour faire tourner.
3. Activer le badge d'information : relever le volume.
4. Basculer sur **Ellipsoïde**, $W = 20$, $H = 10$, $D = 10$.
5. Démontrer le curseur de coupe sur l'axe Y , 50%.
6. Basculer sur l'axe diagonal. Discussion sur la coupe oblique.

A.4 Export

1. Utiliser le bouton de téléchargement.
2. Sauvegarder le PNG.
3. Note : haute résolution, exploitable pour impression ou présentation.

B. Fiche d'exercices

Consignes. Travail individuel. Vous pouvez vérifier dans Pixel Round, *mais la justification mathématique est obligatoire*. À rendre manuscrit ou tapuscrit.

Exercice 1 — Équation du cercle

Énoncé. Un cercle est centré à l'origine $(0,0)$ et a pour rayon $r = 7$. Pour chacun des points ci-dessous, déterminer s'il est *intérieur*, *extérieur* ou *sur* le cercle. Justifier.

- | | |
|--------------|---|
| a) $(3, 4)$ | <i>correction</i> : intérieur ($25 < 49$). |
| b) $(5, 5)$ | <i>correction</i> : extérieur ($50 > 49$, $\sqrt{50} \approx 7,07$). |
| c) $(0, 7)$ | <i>correction</i> : sur. |
| d) $(-7, 0)$ | <i>correction</i> : sur. |

Exercice 2 — Critère euclidien sur une cellule

Énoncé. Un cercle a pour centre $(5,5)$ et pour rayon 5. Appliquer le critère euclidien à la cellule $(i, j) = (1, 3)$: est-elle coloriée ?

Correction : centre de cellule $(1,5, 3,5)$. Distance : $\sqrt{12,25 + 2,25} = \sqrt{14,5} \approx 3,81 < 5$. La cellule est **coloriée**.

Exercice 3 — Aire discrète vs. continue

Énoncé. Dans Pixel Round, générer un cercle de diamètre 20 en algorithme euclidien. Relever l'aire discrète. Calculer πr^2 . Calculer l'erreur relative. Recommencer avec l'algorithme *Seuil*. Comparer.

Correction : $A_{\text{cont}} = 100\pi \approx 314,16$. Euclidien sous 2%. Seuil sur-estime de 5 à 8%.

Exercice 4 — Volume d'un ellipsoïde et coupe

Énoncé. Soit un ellipsoïde de demi-axes $r_x = 4$, $r_y = 6$, $r_z = 3$.

- Calculer le volume continu.
- Après une coupe sur l'axe Y conservant 50% de la hauteur, quel est le volume restant ?
- Décrire la coupe comme inéquation sur la coordonnée y du voxel.

Correction : (a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 = 96\pi \approx 301,59$. (b) Par symétrie, $\approx 150,80$. (c) $y < cut$, avec $cut = 0,5 \cdot D_y = 6$.

Exercice 5 — Fiche-guide du projet final

Consigne. Après production de l'image originale en groupe, répondre :

- (1) Lister les figures géométriques utilisées (cercle, ellipse, sphère, ellipsoïde) et leurs paramètres.
- (2) Pour la figure principale, quel algorithme avez-vous choisi ? Pourquoi ? Quel effet visuel produit-il que les deux autres ne produiraient pas ?
- (3) Y a-t-il des coupes 3D ? Si oui, décrire *une* d'entre elles comme inéquation.

C. Adaptation aux établissements sans dotation numérique

Cette adaptation permet d'appliquer la séquence *intégralement sur papier* lorsque l'accès au numérique n'est pas garanti. L'axe conceptuel demeure ; seul le support change.

C.1 Substitutions par séance

Séance	Activité originale	Substitut papier
1	Démonstration de Pixel Round (1.3)	L'enseignant dessine à la main les trois versions du cercle $D = 10$ sur un quadrillage tracé en grand format.
2	Comparaison logicielle (2.5)	Distribuer des fiches imprimées montrant les trois cercles $D = 16$; comptage manuel.
3	Génération de la sphère 3D (3.1, 3.2)	Distribuer les <i>tranches</i> de la sphère ($z = 0, 1, 2, \dots$) sur papier quadrillé. Empilement mental.
4	Production logicielle (4.2)	Production <i>exclusivement</i> sur papier quadrillé avec crayons de couleur. La défense (4.3) est identique.

C.2 Kit de préparation (à constituer une seule fois)

- Une feuille A3 quadrillée 30×30 tracée à la règle.
- Un jeu par élève de 4 feuilles A4 quadrillées (5 mm).
- Une fiche-référence imprimée des trois cercles comparatifs.

C.3 Articulation avec le LP ou la voie technologique

Pour les Lycées Professionnels et les voies technologiques (STI2D, STL), la séquence est entièrement réutilisable en redéployant le projet final autour d'une production artistique : design d'icône d'application, logotype d'un produit, illustration pour un dossier de Projet pluritechnologique encadré (PPE). Le poids accordé à la justification mathématique est ajusté à la baisse, et le contenu géométrique reste de niveau Première en voie technologique.

D. Glossaire technique pour l'enseignant

- **Algorithme** — suite finie et bien définie d'instructions résolvant un problème. Les trois algorithmes de Pixel Round sont des procédures distinctes pour le même problème (décider quelles cellules colorier).
- **Bresenham (algorithme de)** — algorithme publié en 1965 par Jack Bresenham (IBM) pour les segments, étendu ensuite aux cercles puis aux ellipses (Pitteway, Kappel). Sa marque : arithmétique entière seule.
- **Canevas (canvas)** — élément HTML offrant un espace de dessin 2D ou 3D dans le navigateur.
- **Équation cartésienne** — équation de la forme $F(x, y) = 0$, où la courbe est l'ensemble des zéros d'une fonction. Pour l'ellipse : $(x/r_x)^2 + (y/r_y)^2 - 1 = 0$.
- **Pixel** — abréviation de *picture element*. Unité minimale d'une image numérique.
- **PWA — Progressive Web App** — application web installable et utilisable hors-ligne. Pixel Round en est une.
- **Rastérisation** — conversion d'une description géométrique continue en une matrice de pixels (2D) ou de voxels (3D).
- **Demi-axe** — dans une ellipse de centre C , distance de C à un sommet selon l'axe correspondant. Le cercle est le cas particulier $r_x = r_y$.
- **Tempérament égal de 12 demi-tons** — division de l'octave en 12 intervalles égaux. Rapport entre deux demi-tons consécutifs : $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$. Fondement du système musical occidental.
- **Voxel** — abréviation de *volume element*. Généralisation 3D du pixel : cellule cubique $1 \times 1 \times 1$.
- **WebGL** — API graphique 3D pour navigateur. Pixel Round y accède via *three.js*.

— fin de la séquence pédagogique —